OE
FR

France

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR M. L. PASTEUR,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE,

AVEC

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES.

TOME QUATRIÈME — ANNÉE 1867.

4

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1867

COMITÉ DE RÉDACTION.

M. PASTEUR, Directeur des Études scientifiques, *Président*.

	MM.
MATHÉMATIQUES...........	BRIOT, HERMITE, PUISEUX.
PHYSIQUE..................	BERTIN.
CHIMIE....................	H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.
HISTOIRE NATURELLE......	DELESSE, DES CLOIZEAUX, LACAZE-DUTHIERS.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

RECHERCHES

SUR LA

DÉTERMINATION DES LONGUEURS D'ONDE,

PAR M. E. MASCART,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU LYCÉE NAPOLÉON.

(Ce Mémoire a remporté le Prix Bordin au concours de 1866.)

Dans un Mémoire précédent (*) j'ai déterminé les longueurs d'onde des raies obscures du spectre solaire et de quelques raies brillantes métalliques; j'ai employé pour cela un réseau sur verre qui présentait certaines irrégularités non encore observées, et, pour que les résultats ne fussent pas altérés par cette cause d'erreur, j'ai déterminé expérimentalement la loi suivant laquelle se produisaient les spectres dissymétriques qui ont servi à effectuer les mesures. Toutefois cette imperfection du réseau a pu laisser des doutes dans l'esprit des physiciens sur les nombres que j'en ai déduits; j'ai donc cherché à reprendre ces expériences avec d'autres réseaux qui n'eussent pas les mêmes défauts. La concordance des résultats obtenus avec ces instruments différents

(*) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. Ier; 1864.

me paraît devoir inspirer toute confiance, et justifie en même temps la méthode que j'avais employée dans mon premier Mémoire.

En outre, j'ai voulu augmenter la liste des rayons soumis à l'expérience directe; j'ai choisi pour cela un certain nombre de raies brillantes artificielles, disséminées dans toute l'étendue du spectre lumineux et du spectre ultra-violet. J'ai défini ces raies par leur indice de réfraction ordinaire dans le spath d'Islande, substance que l'on peut toujours se procurer dans le même état physique. Il résulte de là que si l'on a intérêt à connaître la longueur d'onde d'un rayon déterminé, il suffira de déterminer l'indice de réfraction ordinaire de ce rayon dans le spath d'Islande; on pourra alors, à l'aide d'une formule d'interpolation ou par la construction d'une courbe, évaluer la longueur d'onde cherchée avec une approximation aussi grande que si l'on avait à sa disposition un réseau excellent, ce qui sera toujours très-rare.

J'ai indiqué déjà les précautions à prendre quand on veut déterminer les longueurs d'onde avec un réseau, en observant les spectres diffractés par la lumière qui a traversé les mailles du réseau. Quand il s'agit de rayons ultra-violets plus réfrangibles encore que ceux que donne la lumière solaire, les réseaux sur verre ont un nouvel inconvénient, c'est d'absorber ces rayons ultra-violets avec une grande énergie; il faut alors recourir aux spectres diffractés par réflexion. Si les intervalles opaques du réseau jouissent d'un pouvoir réflecteur sensible, la lumière réfléchie sur ces petites lames miroitantes peut donner lieu à des spectres diffractés tout semblables à ceux que l'on observe par transmission.

Soient encore AB (*fig.* 1, *Pl. I*) le plan du réseau, I et I′ deux points homologues de deux intervalles opaques voisins, SI et S′I′ deux rayons incidents parallèles, i l'angle d'incidence, et r l'angle que font avec la normale les rayons diffractés correspondant à une différence de marche égale à $m\lambda$, ε la somme II′ d'une ouverture et d'une partie opaque, on aura

$$(1)\qquad m\lambda = \mathrm{IQ} - \mathrm{I'P} = \varepsilon(\sin r - \sin i).$$

En appelant D l'angle que fait le rayon diffracté IR avec le prolongement IS du rayon incident, on a

$$r = \pi - \mathrm{D} - i, \quad \sin r = \sin(\mathrm{D} + i);$$

par suite,

$$m\lambda = \varepsilon[\sin(D+i) - \sin i] = 2\varepsilon \sin\frac{D}{2}\cos\left(i + \frac{D}{2}\right).$$

On ne rencontre plus ici de minimum de déviation.

Pour trouver la distance de la source virtuelle des rayons diffractés, quand les rayons incidents ne sont pas parallèles, soient encore S la source de lumière (*fig.* 2), S′ la source virtuelle après la diffraction, i et r les angles de la normale au réseau avec le rayon incident SI et le rayon diffracté IR; en appelant di et dr les variations des angles i et r quand on passe du rayon SIR au rayon SI′R′, D et D′ les distances au réseau de la source réelle et de la source virtuelle, les deux triangles SII′ et S′II′ donnent les relations

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{\cos i}{di},$$

$$\frac{D'}{\varepsilon} = \frac{\cos r}{dr}.$$

En différentiant l'équation (1), on obtient

$$\cos r . dr = \cos i\, di,$$

d'où

$$\frac{D'}{D} = \frac{\cos r}{\cos i}\cdot\frac{dr}{di} = \frac{\cos^2 r}{\cos^2 i};$$

et enfin

$$D' = D\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}.$$

Comme l'angle r n'est égal à i que pour la réflexion régulière, on voit que D′ n'est jamais égal à D. Si l'on envisage les spectres de diffraction plus déviés que le rayon réfléchi régulièrement, alors $r < i$, et $D' > D$; la source virtuelle est donc éloignée du réseau par la diffraction. Quand $r > i$, c'est-à-dire pour les spectres situés de l'autre côté du rayon refléchi, $D' < D$, la source virtuelle est rapprochée.

La formule qui donne la longueur d'onde est alors

$$\lambda = \varepsilon\frac{2}{m}\cdot\sin\frac{D}{2}\cos\left(i + \frac{D}{2}\right).$$

Cette méthode, comme on le prévoit facilement, n'est pas susceptible de la même précision que la première. Il faut mesurer deux angles i et D au lieu d'un seul, ou bien s'astreindre à placer le réseau normalement; la formule devient alors

$$\lambda = \varepsilon \cdot \frac{\sin D}{m},$$

et c'est dans ce cas simple que je me suis placé. Mais, si le réseau est un peu dissymétrique, ce qui a presque toujours lieu, on ne peut faire qu'une observation pour chaque raie, et, comme la source virtuelle n'est pas à la même distance que la source réelle, il faut à chaque instant changer le point de la lunette, ce qui peut causer un déplacement de l'axe optique. Sans doute l'expérience a montré que l'axe optique de la lunette était sensiblement parallèle à l'axe géométrique; mais on n'est jamais à l'abri de déplacements accidentels. En outre, il s'agissait de rayons ultra-violets dont l'observation par la photographie est longue et pénible, le degré d'approximation des nombres ainsi obtenus sera donc plus faible que pour les rayons lumineux.

Étude des réseaux.

J'ai eu à ma disposition six réseaux tracés sur verre au diamant, et tous construits par Nobert. Je désignerai par le n° 1 celui qui m'a servi pour mes premières expériences, et qui appartient maintenant au cabinet de Physique de l'École Normale.

L'Association Scientifique, sur l'avis de la Commission de Physique, m'a autorisé à faire l'acquisition d'un autre réseau plus fin que le précédent et divisé sur une plus grande largeur. Ce réseau porte le chiffre 3601, qui indique le nombre des traits; je le désignerai par le n° 2.

Enfin, M. Verdet et M. Jamin ont acheté, sur ma demande, pour le cabinet de l'École Polytechnique, quatre réseaux dont les pouvoirs dispersifs sont très-différents, afin de varier autant que possible les circonstances des expériences. Tous ces réseaux sont divisés sur la même largeur, et sur chacun d'eux est inscrit le nombre des traits gravés. Je désignerai par le n° 3 un réseau contenant 2401 traits, par le n° 4

un autre de 1801 traits, n° 5 un réseau de 1201 traits, et enfin n° 6 un réseau de 601 traits.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici toute ma reconnaissance aux personnes qui ont bien voulu me fournir les moyens de continuer ce travail; je serai heureux si les résultats auxquels je suis arrivé leur paraissent justifier la bienveillance qu'elles m'ont témoignée.

Je vais maintenant étudier chacun de ces différents réseaux.

Réseau n° 1.

Dans le Mémoire déjà cité, j'ai décrit les irrégularités de ce réseau, en me bornant au premier spectre de diffraction; mais on prévoit bien que dans les spectres suivants il se présentera des phénomènes analogues. C'est ce qui a lieu en effet, et les spectres dissymétriques se reproduisent avec une périodicité remarquable. Je vais compléter ici la description de cet instrument, bien que je ne m'en sois plus servi, parce que les mêmes particularités se rencontreront à un degré moins marqué dans d'autres réseaux de la série. Supposons donc (*fig.* 3) le réseau placé normalement sur la direction des rayons incidents SI que nous supposerons parallèles, la face striée étant tournée vers la lunette (*), et recevons les faisceaux diffractés sur une lentille convergente. Les spectres réguliers se forment au foyer principal de la lunette, ils sont donc tous sur une circonférence AA′ ayant pour centre le réseau et pour rayon la distance RI au foyer principal de la lunette; ils se trouvent donc en α, α_1, α_2,... vers la droite, et en α', α'_1, α'_2,... vers la gauche. Dans la région du premier spectre régulier de droite, nous avons vu qu'il existe aussi deux autres spectres β et γ plus voisins de l'objectif; menons par ces points deux circonférences BB′ et CC′ concentriques à la première. De même, par les points β' et γ', où se trouvent les spectres irréguliers de gauche, menons deux autres circonférences $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ concentriques aux précédentes.

Observons maintenant dans la région du deuxième spectre vers la droite, nous y trouvons trois images α_1, β_1, γ_1 disposées de la même

(*) Dans toutes les expériences il faut supposer que le nombre de traits marqué est en haut de la lame, de sorte qu'il n'y a jamais équivoque sur la situation du réseau, quand on indique de quel côté se trouve la face striée.

manière que les images α', β', γ' du premier spectre de gauche. Plus loin, les images du troisième spectre, α_2, β_2, γ_2, ressemblent à celles du premier spectre de droite et à celles du deuxième spectre de gauche α'_1, β'_1, γ'_1, et ainsi de suite, comme on le voit sur la figure.

Tous les spectres de rang impair se ressemblent; de même tous les spectres de rang pair donnent une série d'images semblables entre elles. De plus, tous les spectres de rang impair situés à droite ressemblent aux spectres de rang pair situés à gauche, et inversement.

Enfin, il est à peine utile d'ajouter que si on tourne le réseau de 180 degrés, les phénomènes deviennent symétriques des précédents par rapport à la direction des rayons incidents; les nouvelles images de droite ressemblent à celles qui étaient à gauche dans le cas précédent. En outre, les spectres de réflexion sont symétriques, par rapport au plan du réseau, des spectres de transmission correspondants.

Les faces de la lame sur laquelle le réseau est tracé ne sont pas bien planes ni parallèles, l'arête du biseau qu'elles forment n'est même pas parallèle aux traits; ce biseau produit dans un plan perpendiculaire aux traits une déviation d'environ 15 secondes. C'est probablement dans ces défauts du verre qu'il faut chercher l'explication des spectres irréguliers.

Réseau n° 2.

Ce réseau est plus dispersif que le précédent; la déviation minimum de la raie D dans le premier spectre est d'environ 18 degrés. On y rencontre encore quelques irrégularités plus faibles.

Dans la région du premier spectre, il y a trois images, dont deux sont au point en même temps, et peu éloignées l'une de l'autre; la troisième est isolée, et on peut bien l'observer, mais elle correspond à un spectre dissymétrique, et, pour mesurer le double de la déviation minimum d'une raie sans changer le point de la lunette, il faut avoir soin de retourner le réseau face pour face.

On vérifie facilement dans ce réseau la similitude des spectres de rang pair et celle des spectres de rang impair. De même les spectres de rang pair situés à droite ressemblent aux spectres de rang impair situés à gauche, et inversement.

Les faces de la lame de verre ne sont pas encore parallèles, l'arête

du prisme qu'elles forment est presque perpendiculaire aux traits, et, dans un plan perpendiculaire aux traits, elles ne produisent pas de déviation sensible. La courbure de ces faces est faible, mais appréciable.

Le groupe *b* de raies obscures du spectre solaire est formé, comme on sait, de trois raies qui appartiennent au magnésium. J'ai toujours désigné par *b* la raie la plus réfrangible de ce groupe. Cette raie paraît simple en général, mais dans le deuxième spectre du réseau dont il est ici question, cette raie *b* est nettement dédoublée, et, dans ce cas, j'ai appliqué la lettre *b* à la raie la plus réfrangible de ce petit groupe. Dans ce même spectre, les deux raies D et D′ sont éloignées d'environ 2′ 3″; cela donne une idée de la dispersion exceptionnelle que l'on peut obtenir. Pour arriver à une pareille dispersion de ces deux raies avec les spectres de réfraction, il ne faudrait pas moins de cinq prismes de sulfure de carbone.

Réseau n° 3.

Dans la région du premier spectre de ce réseau, on trouve deux images distantes d'environ 10 ou 15 secondes, et on n'y rencontre pas de phénomène susceptible d'une observation précise.

Au contraire, le deuxième spectre est d'une pureté tout à fait inattendue et vraiment remarquable. La déviation minimum de la raie D est d'environ 24° 6′, et la raie *b* y est dédoublée; de plus, il n'y a presque pas de changement de point quand on passe de l'expérience de droite à celle de gauche, de sorte que les mesures comportent une très-grande exactitude.

Les faces de la lame de verre n'ont qu'une courbure très-faible; elles forment un biseau dont l'arête est à peu près parallèle aux traits, et produisent une déviation d'environ 7 secondes.

Réseau n° 4.

Ce réseau est le plus parfait de tous ceux que j'ai eus à ma disposition, les traits vus au microscope sont d'une régularité et d'une perfection telles, que des opticiens habitués à ce genre de travail les ont trouvés extraordinaires. Les spectres sont très-purs; aussi c'est le réseau dont je me suis servi le plus souvent, en observant autant que possible

le deuxième spectre, pour avoir une plus grande dispersion. La déviation minimum de la raie D est d'environ 8° 52′ dans le premier spectre, et de 18° 1′ dans le deuxième spectre.

Il y a cependant une faible dissymétrie. Quand la face striée est tournée vers la lunette, le premier spectre de droite est un peu plus faible que celui de gauche, et il y a un petit changement de point dans la lunette; mais ces différences sont minimes et ne nuisent pas à la précision des mesures.

Les faces de la lame de verre sont sensiblement parallèles, mais un peu courbes.

Réseau n° 5.

Ce réseau est encore bon. Je ne l'ai pas souvent employé parce qu'il fallait recourir aux spectres de rang élevé pour obtenir une grande déviation. Or, les spectres éloignés ne sont pas favorables pour des mesures précises, car les raies y perdent toujours un peu de leur netteté, même avec des sources de lumière monochromatiques.

La lame de verre produit à peine une déviation de 4 secondes, et les faces paraissent bien planes.

Réseau n° 6.

Dans ce dernier réseau il n'y a pour chacun des spectres qu'une image parfaitement régulière, sans changement de point, mais les différences d'intensité sont très-grandes. Ces différences d'éclat suivent une loi régulière que l'on peut voir à l'inspection du tableau qui suit :

	FACE STRIÉE vers la lunette.		FACE STRIÉE vers le collimateur.	
	Gauche.	Droite.	Gauche.	Droite.
1^er^ spectre ...	Faible.	Brillant.	Brillant.	Faible.
2^e^ spectre ...	Faible.	Brillant.	Brillant.	Faible.
3^e^ spectre ...	Brillant.	Faible.	Faible.	Brillant.
4^e^ spectre ...	Brillant.	Faible.	Faible.	Brillant.

C'est un réseau que j'ai peu employé, à cause de sa faible dispersion.

La lame de verre produit une déviation d'environ 7 secondes, et la courbure des faces est appréciable.

Longueurs d'onde des raies obscures du spectre solaire.

J'ai repris l'étude du spectre solaire avec les cinq derniers réseaux, et je résume dans quelques tableaux les résultats des expériences qui ont été faites dans les meilleures conditions. Je n'ai rien à ajouter sur la description des expériences. Quand le réseau était régulier, j'observais la déviation minimum d'une même raie, à droite et à gauche, en laissant la même face tournée vers le collimateur. Quand les phénomènes étaient irréguliers, j'observais en retournant le réseau, comme je l'ai déjà dit, et en me mettant à l'abri de l'erreur causée par le biseau des faces. Toutefois, j'ai souvent négligé de faire cette dernière correction, car elle est insignifiante. En effet, si les déviations des différentes raies varient entre 15 et 25 degrés, par exemple, et que la déviation causée par le biseau soit de 10 secondes, il est clair qu'en retranchant 10 secondes à toutes les déviations les rapports des sinus de ces différents angles seront à peine altérés par le cinquième chiffre significatif. Les erreurs expérimentales portent quelquefois sur le quatrième chiffre; la correction dont il s'agit est donc souvent superflue.

J'ai mesuré avec soin les déviations de la raie D, non-seulement pour chaque réseau, mais pour chaque série d'expériences relatives à un même réseau, et les rapports de longueurs d'onde ont été calculés dans chaque série à l'aide de la mesure de la raie D correspondante. Cette précaution paraît indispensable pour plusieurs raisons :

1° On se met ainsi à l'abri d'une erreur accidentelle commise sur une mesure unique, erreur qui affecterait tous les rapports.

2° Si l'excentricité de la face striée a une influence, cette influence se fait sentir à peu près de la même manière sur toutes les raies, et disparaît dans les rapports, comme on l'a vu.

3° Quand la température varie entre les limites ordinaires, les distances des traits du réseau changent et modifient les déviations, sans que les rapports des sinus soient altérés. Cette influence des variations de la température est parfaitement appréciable.

Enfin, dans tous les tableaux qui suivent, je ne donne que les longueurs d'onde calculées dans chaque série d'expériences, sans rapporter les déviations elles-mêmes. Ces nombres compliqueraient beaucoup les tableaux inutilement. J'ai d'ailleurs indiqué la grandeur des déviations pour les principaux réseaux; comme la largeur de la couche striée est la même dans les cinq derniers, le nombre des traits indiquera suffisamment l'ordre de la dispersion pour les cas où je ne l'ai pas donné explicitement.

J'ai fait peu d'expériences nouvelles sur les raies de la région ultra-violette; le spectre ultra-violet de la lumière solaire a dans les prismes une étendue à peu près égale à celle du spectre lumineux, et l'intensité devient très-faible à partir de la région moyenne. J'ai obtenu avec les vapeurs métalliques des spectres bien plus étendus et des raies plus intenses. Les mesures sont alors plus faciles; il y a donc avantage à remplacer, pour cette région, l'étude du spectre solaire par celle de raies métalliques bien définies; je reviendrai plus loin sur ce sujet.

Voici les résultats relatifs aux raies obscures du spectre solaire :

RÉSEAU N° 2.

RAIES.	POUR L'OBSERVATION DE DROITE, LA FACE STRIÉE EST TOURNÉE VERS							MOYENNE.
	le collimateur. 1er spectre.	la lunette. 1er spectre.	la lunette. 1er spectre.	le collimateur 1er spectre.	la lunette. 2e spectre	le collimateur. 2e spectre.	le collimateur. 1er spectre.	
B	0,68654	0,68655	0,68649	0,68658	»	»	0,68654	0,68655
C	0,65607	0,65609	0,65602	0,65606	0,65607	»	0,65602	0,65605
γ (1)	»	»	0,62755	0,62754	0,62753	»	»	0,62754
D'	0,58938	0,58945	0,58945	0,58943	0,58940	0,58938	0,58938	0,58941
E	0,52678	0,52684	0,52672	0,52685	0,52683	0,52682	0,52674	0,52680
b'' (2)	0,51813	0,51820	»	»	»	»	»	0,51817
b	»	»	0,51652	0,51661	0,51657	0,51657	0,51653	0,51656
F	0,48595	0,48592	0,48596	0,48597	0,48598	»	0,48603	0,48597
G	0,43064	»	»	»	»	»	»	0,43064

(1) J'ai appelé γ une belle raie facile à reconnaître entre D et C.
(2) La moins réfrangible du groupe b.

Toutes ces expériences ont été faites avec retournement du réseau.

RÉSEAU N° 3.

RAIES.	FACE STRIÉE TOURNÉE VERS le collimateur.	FACE STRIÉE TOURNÉE VERS la lunette.	MOYENNE.
B	0,68661	»	0,68661
C	0,65609	»	0,65609
D'	0,58942	0,58942	0,58942
E	0,52681	0,52680	0,52680
b	0,51660	0,51653	0,51656
F	0,48602	0,48606	0,48604
G	0,43070	0,43076	0,43073

Expériences faites sans retournement, et observation du deuxième spectre, puisque le premier est impur.

RÉSEAU N° 4.

RAIES.	FACE STRIÉE vers la lunette.			FACE STRIÉE vers le collimateur.			MOYENNE.
	1er spectre.	2e spectre.	3e spectre.	2e spectre.	3e spectre.	4e spectre.	
B	0,68672	0,68668	»	»	»	»	0,68670
C	0,65624	0,65609	»	0,65598	»	»	0,65611
γ	0,62780	0,62753	»	»	»	»	0,62766
D'	»	0,58939	0,58935	0,58934	0,58943	0,58940	0,58938
E	0,52664	0,52683	0,52679	0,52671	0,52677	0,52679	0,52675
b''	0,51829	0,51817	0,51822	0,51810	0,51818	0,51822	0,51820
b	»	»	»	0,51648	0,51655	0,51656	0,51653
F	0,48616	0,48599	0,48592	»	»	»	0,48602
G	0,43088	0,43101	0,43091	»	»	»	0,43093

Ces expériences ont été faites sans retournement. Les nombres de la première colonne sont les plus discordants; ils proviennent du premier spectre où la déviation était trop faible.

RAIES DU SPECTRE SOLAIRE ULTRA-VIOLET.

RAIES.	RÉSEAU N° 3.		RÉSEAU N° 4.		MOYENNE.
	1ᵉʳ spectre.	2ᵉ spectre de réflexion.	1ᵉʳ spectre.	2ᵉ spectre de réflexion	
H	0,39664	»	0,39677	»	0,39671
L	0,38194	»	0,38214	»	0,38204
M	0,37287	0,37267	0,37284	0,37262	0,37280
N	0,35795	0,35810	0,35766	0,35784	0,35789
O	0,34433	0,34389	0,34387	0,34378	0,34397
P	0,33660	0,33617	0,33579	0,33597	0,33613
Q	0,33065	0,32954	0,32780	0,32880	0,32919

L'accord n'est pas aussi satisfaisant que pour les rayons lumineux; les déviations sont en effet plus faibles, les spectres moins intenses, et le procédé de mesure moins précis.

J'ai consulté ces différents tableaux et comparé autant que possible les circonstances plus ou moins avantageuses des diverses expériences pour décider quels sont les nombres qui les résument avec le plus de probabilité. Ces nombres ne sont pas la moyenne des moyennes obtenues avec les différents réseaux, ni la moyenne de toutes les expériences. En effet, on ne doit pas attribuer la même importance à deux séries d'expériences dont l'une parait inférieure à quelque point de vue; ainsi je n'hésite pas à sacrifier la première colonne des résultats obtenus avec le n° 4, à cause de la petitesse des déviations. De même, il peut y avoir des expériences particulières contre lesquelles on doit se mettre en garde; ainsi la moyenne des valeurs obtenues avec le réseau n° 4 pour la raie D' parait inexacte, car les résultats isolés sont trop discordants.

Pour cette raie D' j'ai consulté aussi des expériences nombreuses faites avec la lumière monochromatique du sodium. En plaçant du sel marin fondu dans le dard d'un chalumeau à gaz tonnants, on obtient une lumière très-éclatante, et, si la quantité de sel est assez grande, on *renverse* très-facilement les deux raies D et D'. L'observation de ces raies renversées est plus précise que celle des raies brillantes.

De même, pour les raies b'' et b j'ai tenu compte des expériences faites avec le magnésium, expériences dont il sera question plus loin.

Enfin, pour toutes les autres, j'ai fait entrer en ligne de compte les nombres obtenus avec le réseau n° 1, et consignés dans mon premier Mémoire. Les résultats définitifs me paraissent être les suivants, et je ne crois pas aller au delà de l'expérience en assignant à ces nombres le degré d'approximation indiqué dans la colonne voisine.

RAIES.	LONGUEURS d'onde.	DEGRÉ d'approximation.	RAIES.	LONGUEURS d'onde.	DEGRÉ d'approximation.
B	0,68666	0,00005	G	0,43076	0,00005
C	0,65607	0,00002	H	0,39672	0,00005
γ	0,62754	0,00005	L	0,38201	0,00005
D'	0,58943	0,00002	M	0,37284	0,00005
D	0,5888	acceptée.	N	0,35795	0,00005
E	0,52679	0,00002	O	0,34400	0,00010
b''	0,51820	0,00003	P	0,33605	0,00010
b	0,51655	0,00002	Q	0,32870	0,00050
F	0,48598	0,00004	R	0,31775	0,00100

Raies des lumières artificielles.

J'ai choisi parmi les sources de lumière artificielle quelques-unes de celles qui présentent les raies les plus brillantes et les plus faciles à obtenir. Mes expériences ont porté sur les principales raies des substances suivantes :

Hydrogène,	Magnésium,
Lithium,	Argent,
Calcium,	Zinc,
Strontium,	Cadmium.

Raies de l'hydrogène.

L'hydrogène incandescent a deux raies très-brillantes, une rouge et une bleue, que l'on observe facilement en faisant passer des étincelles d'induction dans un de ces tubes à gaz raréfiés connus sous le

nom de tubes de Geissler. Si le tube présente une partie étranglée, l'étincelle y prend un grand éclat, et on peut s'en servir utilement dans plusieurs expériences de physique. Les indices de réfraction de ces deux raies dans le spectre ordinaire du spath d'Islande sont :

RAIES.	INDICES.
Rouge	1,65450
Bleue	1,66797

Raies des métaux alcalins.

Pour obtenir les raies du lithium, du calcium et du strontium, il suffit de placer dans le dard du chalumeau, avec une allumette en bois, un peu d'un sel quelconque : ce sont les chlorures qui conviennent le mieux. J'ai observé les raies rouges, orange et bleue du lithium, et les raies bleues du calcium et du strontium. Voici les indices de ces raies (*) :

RAIES.		INDICES.
Lithium	rouge	1,65398
	bleue	1,67145
Calcium	bleue	1,67792
Strontium	bleue	1,67167

Raies des autres métaux.

Pour produire les raies des vapeurs métalliques avec un éclat suffisant, j'ai renoncé à l'emploi de la lumière électrique alimentée par une pile de 40 éléments; chacun sait combien il est difficile de faire une

(*) Tous ces indices ont été déterminés pendant l'hiver dans une cave de l'École Normale où la température était sensiblement de 12 degrés et variait très-peu.

série d'expériences dans de pareilles conditions. Je suis arrivé à des résultats bien meilleurs en imitant une méthode déjà employée par un grand nombre de physiciens : c'est de faire passer une étincelle d'induction entre deux fils du métal que l'on veut étudier. Pour qu'une pareille étincelle puisse donner des spectres de diffraction assez intenses, il faut employer une bobine d'induction puissante et mettre les extrémités du fil induit en relation avec les armatures d'un grand condensateur. Cette disposition, imaginée par Van der Willigen, raccourcit les étincelles, mais leur donne un éclat considérable.

La machine d'induction dont je me suis servi a été construite par M. Ruhmkorff; elle a 50 kilomètres de fil induit. Je la faisais marcher avec 6 éléments Bunsen, grand modèle; j'employais comme condensateur une bombonne à peu près sphérique en verre brun, de 20 à 25 litres de capacité, revêtue d'étain à l'intérieur et à l'extérieur.

Je désignerai les différentes raies d'un métal par des numéros d'ordre, en commençant par le rouge; j'indique en même temps la couleur de ces raies. Voici celles qui ont été observées :

MAGNÉSIUM.

RAIES.		INDICES.
Vertes	1 (b'')	1,66431
	2 (b')	»
	3 (b)	1,66449
Bleue	4	1,67321

Ces trois raies b, b', b'' forment le groupe b du spectre solaire.

ARGENT.

RAIES.		INDICES.
Vertes	1	1,66171
	2	1,66405

ZINC.

RAIES.		INDICES.
Rouge......	1........	1,65552
Vertes.....	2........	1,66711
	3........	1,66723
	4........	1,66853
Bleues.....	5........	1,66969
	6........	1,67025

Toutes ces raies du zinc sont très-brillantes. Les raies 2 et 3 paraissent avoir une certaine largeur; il est difficile de les observer avec précision.

Le cadmium a aussi de très-belles raies lumineuses; je les indiquerai plus loin avec les autres raies de ce métal, dont j'ai fait une étude plus complète.

Spectre ultra-violet du cadmium.

Dans un Mémoire important *sur la transparence photographique des différents corps* (*), M. W.-A. Miller a montré que les spectres obtenus ainsi avec l'étincelle d'induction s'étendent beaucoup plus loin que le spectre solaire ultra-violet, et il a donné un grand nombre de dessins représentant les spectres de différents métaux obtenus par la photographie. Ces spectres sont en effet très-étendus, mais assez imparfaits; M. Miller reproduisait un spectre tout entier en une seule épreuve, de sorte que plusieurs régions n'étaient pas au point. En outre, l'appareil dont il s'est servi ne permettait pas d'obtenir des images très-pures.

J'ai repris cette question en me servant de l'appareil et des procédés décrits dans mon premier Mémoire. La lunette et le collimateur sont en quartz, les tubes ont été modifiés de façon à permettre des variations de foyer considérables, et je reproduis les spectres à l'aide de l'oculaire photographique.

J'ai étudié ainsi, dans le spectre ordinaire du spath d'Islande, les raies ultra-violettes de plusieurs métaux : le magnésium, le zinc, l'ar-

(*) *Philosophical Transactions*, 1862.

gent et le cadmium; on peut mesurer ces raies avec une précision de même ordre que s'il s'agissait de rayons lumineux. Pour donner une idée de l'amplitude considérable des spectres, il me suffira de dire que j'ai obtenu avec l'argent un spectre ultra-violet dont l'étendue angulaire est de 21 degrés, avec un prisme de spath dont l'angle réfringent est de 60 degrés, dans lequel la dispersion du spectre lumineux est peu supérieure à 3 degrés; c'est donc pour le spectre ultra-violet une étendue six fois plus grande. On peut de même, par des tâtonnements méthodiques, mesurer les longueurs d'onde de ces rayons très-réfrangibles à l'aide des spectres diffractés par réflexion.

Je ne rapporterai ici que le spectre ultra-violet du cadmium, parce que c'est le seul dont j'ai mesuré les longueurs d'onde; il est dessiné *fig.* 4 (*). Ces expériences sont très-pénibles; il faut douze ou quinze épreuves photographiques pour reproduire avec précision un spectre tout entier, et, quand on veut faire une mesure, il faut plusieurs épreuves d'essai pour amener le réticule au voisinage de la raie cherchée. On comprendra donc que je me sois borné à l'étude complète du cadmium, qui présente les raies les plus intenses. Voici le tableau des différentes raies de ce métal :

RAIES.		INDICES.	RAIES.	INDICES.
Rouge....	1	1,65513	12	1,70779
Vertes....	2	1,66243	13	1,71384
	3	1,66281	14	1,72338
	4	1,66529	15	1,73067
Bleues....	5	1,66864	16	1,73316
	6	1,67028	17	1,74160
Violette ..	7	1,67429	18	1,76078
			19	1,76326
Spectre ultra-violet.			20	1,77499
			21	1,78382
	8	1,68259	22	1,80096
	9	1,69349	23	1,80247
	10	1,69827	24	1,81315
	11	1,70103	25	1,82460

(*) La raie 8 de ce dessin paraît due à l'air; elle se retrouve dans les spectres obtenus avec d'autres métaux.

Les raies 2 et 3 ressemblent aux raies 2 et 3 du zinc; elles sont très-voisines et paraissent avoir une certaine largeur; il est difficile de les mesurer avec précision.

Les indices des raies du thallium, du bismuth et de l'étain observées dans mon premier Mémoire sont les suivants :

RAIES.		INDICES.
Thallium.....	verte...	1,66285
Bismuth.....	bleue...	1,66980
Étain........	bleue...	1,67263

Longueurs d'onde des raies brillantes.

Voici maintenant les résultats de la mesure des longueurs d'onde de ces différentes raies :

HYDROGÈNE.

RÉSEAU N° 4.

RAIES.	1er SPECTRE.	2e SPECTRE.	3e SPECTRE.	MOYENNES.
Rouge.............	0,65618	0,65616	0,65615	0,65617
Bleue..............	0,48606	0,48606	»	0,48606
	—	—	—	
	4 expériences.	4 expériences.	1 expérience.	

Ces deux raies de l'hydrogène sont indiquées par plusieurs physiciens comme coïncidant avec les raies C et F du spectre solaire, les longueurs d'onde déterminées directement ne diffèrent en effet que de $\frac{1}{6000}$; cette différence peut être parfaitement attribuée aux erreurs d'expérience, car les raies de l'hydrogène, malgré leur éclat, ne sont pas aussi faciles à observer que les raies obscures du spectre solaire.

LITHIUM, CALCIUM.

RÉSEAU N° 4.

RAIES.	1er SPECTRE.	2e SPECTRE.	3e SPECTRE.	MOYENNES.
Lithium.... rouge...	0,67057	0,67063	0,67051	0,67057
Calcium.... bleue....	0,42263	0,42248	»	0,42255

STRONTIUM.

RÉSEAU N° 5.

RAIE.	1er SPECTRE.	2e SPECTRE.	3e SPECTRE.	4e SPECTRE.	5e SPECTRE.	MOYENNE.
Bleue..	0,46048	0,46072	0,46068	0,46076	0,46075	0,46068

MAGNÉSIUM.

RAIES.		RÉSEAU N° 2.		RÉSEAU N° 3.		RÉSEAU N° 4.		MOYENNES.
		1er spectre.	1er spectre.	2e spectre.	2e spectre.	1er spectre.	2e spectre.	
Vertes..	1	0,51818	0,51820	0,51815	0,51824	0,51828	0,51818	0,51820
	2	»	»	»	»	»	0,51706	0,51706
	3	0,51652	0,51650	0,51648	0,51655	0,51657	0,51652	0,51653
Bleue...	4	0,44797	0,44800	0,44786	0,44794	0,44796	0,44794	0,44795

ARGENT.

RAIES.		RÉSEAU N° 2.			RÉSEAU N° 3.		RÉSEAU N° 4.		MOYENNES
		1er spectre.	1er spectre	2e spectre	2e spectre.	2e spectre.	2e spectre.	2e spectre.	
Vertes..	1	0,54633	0,54631	0,54624	0,54636	0,54627	0,54639	0,54639	0,54633
	2	0,52069	0,52069	0,52058	0,52070	0,52062	0,52069	0,52076	0,52067

ZINC.

RAIES.		RÉSEAU N° 2.		RÉSEAU N° 3.			RÉSEAU N° 4.		MOYENNES
		1er spectre.	1er spectre.	2e spectre.	2e spectre.	2e spectre.	2e spectre	2e spectre.	
Rouge..	1	0,63610	0,63614	»	0,63602	0,63604	0,63605	0,63608	0,63607
Vertes..	2	»	»	»	»	»	0,49232	»	0,49232
	3	»	»	»	»	»	0,49105	»	0,49105
	4	0,48092	0,48089	0,48090	0,48079	0,48091	0,48088	0,48109	0,48090
Bleues..	5	0,47205	»	0,47208	0,47200	0,47210	0,47204	0,47225	0,47206
	6	0,46785	»	0,46783	0,46780	0,46788	0,46782	0,46807	0,46784

CADMIUM (raies lumineuses).

RAIES.		RÉSEAU N° 2.			RÉSEAU N° 3.		RÉSEAU N° 4		MOYENNES
		1er spectre.	1er spectre.	2e spectre.	2e spectre.	2e spectre.	1er spectre.	2e spectre	
Rouge ..	1	»	»	»	0,64370	0,64370	0,64367	0,64372	0,64370
Vertes ..	2	»	»	»	0,53775	0,53771	»	0,53766	0,53771
	3	»	»	»	0,53371	0,53364	0,53365	0,53363	0,53363
	4	0,50852	0,50841	0,50829	0,50846	0,50839	0,50849	0,50845	0,50844
Bleues ..	5	0,47984	0,47981	»	0,47986	0,47977	0,47998	0,47994	0,47986
	6	0,46771	»	»	0,46765	0,46757	0,46761	0,46773	0,46765
Violette .	7	0,44134	»	»	0,44145	»	0,44166	0,44135	0,44145

CADMIUM (raies ultra-violettes).

RÉSEAU N° 4.

Premier spectre. — Réseau perpendiculaire sur les rayons incidents.

RAIES.	PAR TRANSMISSION.	PAR RÉFLEXION.		MOYENNES.
8	»	0,39856	»	0,39856
9	0,36035	0,36087	0,36105	0,36075
10	0,34639	0,34651	»	0,34645
11	0,34029	0,34023	0,34047	0,34030
12	0,32875	»	»	0,32875
17	»	0,27421	0,27447	0,27434
18	»	0,25742	0,25730	0,25735
23	»	0,23226	0,23140	0,23183
24	»	»	0,22656	0,22656
25	»	»	0,22171	0,22171

L'accord des expériences que renferme le dernier tableau est moins satisfaisant que dans ceux qui précèdent, il n'y a pas lieu de s'en étonner; toutefois l'erreur semble porter seulement sur le quatrième chiffre, excepté pour les trois dernières raies, où le troisième chiffre n'est qu'approché.

On peut remarquer que la longueur d'onde diminue très-lentement, malgré les variations considérables des indices. Comme la longueur d'onde de la raie A est environ égale à 0,76, et que la dernière raie observée du cadmium a pour longueur d'onde 0,22, on voit que les radiations accessibles aux mesures exactes forment presque deux octaves.

Je vais résumer dans un tableau général les résultats de toutes ces expériences, en tenant compte de celles qui ont déjà été faites avec le réseau n° 1, et rapportées dans mon premier Mémoire. J'indique aussi pour chaque raie le degré d'approximation auquel elle me paraît déterminée.

SUBSTANCES.	RAIES.		LONGUEUR d'onde.	DEGRÉ d'approximation.
Hydrogène	Rouge		0,65617	0,00010
	Bleue		0,48606	0,00010
Lithium	Rouge		0,67057	0,00005
	Bleue		0,46020	0,00010
Calcium	Bleue		0,42255	0 000 0
Strontium	Bleue		0,46068	0 000 0
Thallium	Verte		0,53488	0 00005
Magnésium	Vertes	1	0,51820	0,00002
		2	0,51706	0,00005
		3	0,51655	0,00002
	Bleue	4	0,44795	0,00003
Argent	Vertes	1	0,54635	0,00003
		2	0,52071	0,00003
Bismuth	Bleue		0,47212	0 00005
Étain	Bleue		0,45233	0 00005
Zinc	Rouge	1	0,63607	0,00003
	Vertes	2	0,49232	0,00008
		3	0,49105	0,00008
		4	0,48090	0,00005
	Bleues	5	0,47206	0,00003
		6	0,46785	0,00003
Cadmium	Rouge	1	0,64370	0,00003
	Vertes	2	0,53771	0,00008
		3	0,53363	0,00008
		4	0,50844	0,00003
	Bleues	5	0,47986	0,00005
		6	0,46765	0,00005
	Violettes	7	0,44145	0,00005
	Ultra-violettes	8	0,39856	0,00010
		9	0,36075	0,00020
		10	0,34645	0,00010
		11	0,34030	0,00010
		12	0,32875	0,00020
		17	0,27434	0,00020
		18	0,25742	0,00020
		23	0,23183	0,00030
		24	0,22656	0,00050
		25	0,22171	0,00100

Longueur d'onde de la raie D.

Dans tout ce qui précède j'ai adopté, pour longueur d'onde de la raie D, le nombre 0,5888 qui a été déduit des expériences de Fraunhofer. Mon but principal n'était pas de déterminer les longueurs d'onde en valeur absolue; mais comme mes expériences fournissent un moyen facile de contrôler la valeur adoptée pour la raie D, je n'ai pas cru devoir le passer sous silence.

M. Dumoulin, successeur de M. Froment, s'est mis pour cela à ma disposition avec une extrême obligeance. Il a construit deux micromètres sur verre, l'un avec la grande machine à diviser de M. Froment, l'autre avec une petite machine qui sert à diviser de petites longueurs. Ces deux micromètres, superposés et examinés au microscope, ont été trouvés parfaitement identiques, ce qui montre que les deux vis micrométriques sont exactement rapportées à la même unité.

Les micromètres étant plus larges que la couche striée des réseaux, on plaçait un micromètre sur un réseau et on trouvait facilement la largeur de ce dernier en observant quelles divisions coïncidaient avec les traits extrêmes du réseau.

Les mesures ont porté sur les réseaux désignés par les n^{os} 1, 3, 4, 5, 6, et elles ont été faites à la température de 15 ou 16 degrés centigrades.

Il a fallu vérifier d'abord si le nombre des traits de ces différents réseaux était bien exactement le nombre indiqué par le constructeur. Pour le réseau n° 1 j'ai pris la peine de compter tous les traits, comme je l'ai dit dans mon premier Mémoire, et deux expériences m'ont donné le même nombre 2519. Il y a donc 2518 intervalles. M. Dumoulin a compté les traits du réseau n° 6, et vérifié que le nombre 601 est exact. Au lieu de compter les traits des autres réseaux, ce qui eût été très-pénible, on superposait les deux réseaux 5 et 6, les faces striées en regard l'une de l'autre, et, en les examinant au microscope, on faisait coïncider les premiers traits; on observait alors que les traits étaient en coïncidence de deux en deux, et que les deux séries s'arrêtaient en même temps. Il en résulte que les deux réseaux ont exactement la même largeur et que le réseau n° 5 contient bien 1201 traits. On a vérifié de la même façon les nombres de traits des réseaux 4 et 3. Le

réseau n° 2 n'a pas été mesuré, parce qu'on n'y a observé que des spectres irréguliers.

Dans le cours des expériences qui font l'objet de ce Mémoire, j'ai fréquemment mesuré la déviation de la raie D dans les différents spectres de ces cinq réseaux. Toutes les mesures que je fais intervenir ici ont été faites à la cave, avec la lumière du sel marin volatilisé, et à une température sensiblement constante de 12 ou 13 degrés centigrades.

Dans les séries relatives aux spectres réguliers d'un même réseau, j'ai cherché la moyenne du nombre

$$\frac{1}{n}\sin\frac{\Delta}{2},$$

n étant le rang du spectre observé, Δ la déviation minimum. On en déduit la longueur d'onde par la formule

$$\lambda = 2\varepsilon\frac{1}{n}\sin\frac{\Delta}{2}.$$

Je dois faire une observation relativement au réseau n° 1. M. Froment avait autrefois mesuré la largeur de ce réseau et m'avait donné le nombre $5^{mm},714$. Ce résultat diffère de celui qu'on trouvera dans le tableau, et M. Dumoulin a pris soin de répéter plusieurs fois cette mesure. Il y a là une discordance fâcheuse; j'ignore d'ailleurs quelle méthode avait employée M. Froment.

RÉSEAUX.	LARGEUR de la couche striée.	NOMBRE des intervalles de traits.	$\frac{\lambda}{n}\sin\frac{\Delta}{2}$.	LONGUEUR d'onde de la raie D
N° 1.....	mm 5,699	2518	0,130315	0,58988
N° 3.....	6,7685	2400	0,104425	0,5890
N° 4.....	6,768	1800	0,078303	0,58884
N° 5.....	6,768	1200	0,052192	0,58873
N° 6.....	6,768	600	0,026096	0,58873

Le nombre donné pour le réseau n° 1 est relatif au spectre que l'on peut observer sans changer le point de la lunette; la différence de ce résultat avec les suivants et les irrégularités du réseau me déterminent à n'en pas tenir compte pour la question qui nous occupe.

Le nombre déduit du réseau n° 3 est relatif au deuxième spectre; nous avons vu que le premier n'est pas observable.

Le réseau n° 4 est celui qui paraît offrir le plus de garanties, parce qu'il est plus régulier que ceux qui précèdent et plus dispersif que ceux qui suivent.

Les quatre derniers nombres ont pour moyenne 0,58882, et chacun d'eux diffère de la moyenne de moins de deux unités du quatrième chiffre, ce qui donne une erreur relative d'environ $\frac{1}{5000}$. Ces expériences paraissent donc confirmer avec une extrême précision la valeur 0,5888, qui a été déduite des mesures de Frauenhofer.

Cependant je ne dois pas terminer ce sujet sans déclarer que la question n'est pas résolue d'une manière définitive. Il y a sans doute un grand intérêt à connaître exactement la valeur d'une longueur d'onde, car les physiciens pourraient s'en servir pour comparer leurs différentes mesures; mais pour arriver à donner un nombre certain il faut connaître rigoureusement la valeur du mètre auquel on a comparé le réseau, et mesurer les déviations dans des conditions de température bien définies. Il y a là des difficultés expérimentales d'une nature toute spéciale. Dans les expériences qui viennent d'être rapportées, les déviations et les réseaux ont été mesurés à des températures différentes: on comprend bien que, par suite de l'incertitude qui règne sur la valeur exacte de l'unité de mesure, il était inutile de faire les corrections qu'entraînent ces différences de température.

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Mascart, *relatif à la détermination des longueurs d'onde.* Commissaires : MM. Pouillet, Edmond Becquerel, Foucault, Regnault, Fizeau rapporteur (*).

Un seul Mémoire, inscrit sous le n° 1, a été envoyé au concours avec cette épigraphe : *La simplicité des méthodes est une garantie de la précision des mesures.*

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 11 mars 1867).

Ce travail important et plein d'intérêt a fixé de suite l'attention de vos Commissaires, et leur a paru répondre d'une manière très-satisfaisante au programme proposé par l'Académie; dans le but de justifier devant elle cette appréciation favorable, nous allons présenter un exposé succinct de l'état de la question et des progrès réalisés par l'auteur de ce Mémoire.

On sait que pour la lumière comme pour le son, la longueur d'onde est une certaine longueur considérée dans le sens de la propagation, et correspondant à deux points où les mouvements vibratoires sont semblables, la demi-longueur d'onde correspondant à deux points où les mouvements vibratoires sont opposés. Cette longueur est plus ou moins grande, suivant la couleur de la lumière ou le degré de gravité des sons; mais elle est fixe pour chaque variété de vibrations se propageant dans le même milieu, en sorte qu'elle peut être employée à caractériser et à définir, soit un son en particulier, soit un rayon de lumière d'une certaine couleur.

En ne considérant ici que la lumière, les physiciens s'accordent aujourd'hui à regarder les divers rayons élémentaires qui la composent comme ne différant entre eux d'une manière essentielle que sous le rapport de la longueur d'onde; en sorte que cette longueur étant connue et mesurée avec précision pour un rayon donné, toutes les propriétés physiques de ce rayon sont, par là même, déterminées comparativement à celles d'un autre rayon d'une longueur d'onde différente. On voit ainsi que la longueur d'onde est un nombre constant et caractéristique de chaque variété de rayons lumineux, soit que les rayons se rapportent à l'une des sept couleurs principales du spectre solaire, soit qu'ils appartiennent à ces parties extrêmes et obscures du spectre, où l'œil ne peut les apercevoir qu'incomplétement, et où leur présence se révèle surtout par des phénomènes particuliers d'actions chimiques, de phosphorescence, de fluorescence ou d'élévation de température.

Cependant une difficulté considérable se présente dans la détermination précise de ces longueurs d'onde; leurs dimensions sont, en effet, si petites, qu'elles dépassent à peine un demi-millième de millimètre pour les rayons jaunes. Un peu plus grandes pour les rayons rouges et décroissant d'une manière continue jusqu'aux rayons violets du spectre, ces longueurs restent toujours d'une petitesse extrême.

Malgré cette circonstance défavorable, les physiciens ont trouvé dans plusieurs phénomènes lumineux remarquables les moyens de fixer avec une certaine précision les valeurs numériques des longueurs d'onde. Les anneaux des lames minces de Newton, les franges d'interférence d'Yong, celles des miroirs de Fresnel et plusieurs autres phénomènes analogues, ont fourni des déterminations assez exactes et concordantes; mais c'est principalement le phénomène des réseaux de Fraunhofer qui a donné lieu aux mesures les plus satisfaisantes, surtout parce qu'elles ont été rapportées à des rayons bien définis par les lignes fines ou raies du spectre solaire.

Lorsqu'on regarde de loin une fente lumineuse avec une lunette au devant de laquelle on a placé un réseau formé, soit de fils parallèles équidistants et très-rapprochés, soit de traits d'une grande finesse régulièrement gravés sur une glace, on observe une image blanche centrale comme si le réseau n'existait pas, mais de plus, à droite et à gauche de cette image, on aperçoit plusieurs spectres colorés dans lesquels on peut distinguer les lignes fixes ordinaires. Si la lunette est montée sur un cercle divisé, on peut mesurer les angles de déviation des principaux rayons, et, les mesures étant supposées prises sur le premier spectre, on obtient immédiatement la longueur d'onde d'un rayon en multipliant, suivant la formule de M. Babinet, le sinus de l'angle de déviation par la distance qui sépare les milieux de deux traits contigus du réseau.

Bien que les déterminations effectuées par Fraunhofer au moyen de cette méthode fussent considérées comme excellentes et certainement les meilleures que la science possédât jusqu'à ce jour, il était cependant désirable qu'elles fussent vérifiées par de nouvelles observations très-précises, et surtout qu'elles fussent étendues à un certain nombre de nouveaux rayons visibles ou invisibles qui n'ont été découverts et étudiés que dans ces derniers temps. Tel est, en effet, le but que s'est proposé l'auteur du Mémoire n° 1, en se livrant aux longues et consciencieuses recherches dont nous allons rapporter les résultats les plus saillants.

On peut signaler d'abord dans les premiers chapitres la démonstration d'une propriété remarquable des réseaux découverte par l'auteur. Voici en quoi elle consiste : lorsqu'on observe par transmission à tra-

vers un réseau de plus en plus incliné sur le rayon incident, et dans le plan de diffraction, la déviation des spectres diminue d'abord, puis reste un instant constante pour augmenter ensuite. Il y a donc là *un minimum de déviation* tout à fait analogue au minimum de déviation observé par Newton dans les spectres réfractés par les prismes de verre. L'auteur explique par des formules élégantes toutes les circonstances du phénomène, et fait voir de plus que c'est en observant ce minimum de déviation que les mesures deviennent les plus simples et les plus rigoureuses.

Plusieurs chapitres du Mémoire sont consacrés à la description et à l'étude des appareils d'observation. C'étaient principalement un goniomètre construit avec une grande perfection par MM. Brunner, et des réseaux variés au nombre de six, tracés sur verre au diamant par M. Nobert de Barth.

Muni de ces moyens d'observation, et après s'être entouré de toutes les précautions qui pouvaient assurer l'exactitude des résultats, l'auteur a repris d'une manière complète la détermination des longueurs d'onde des principaux rayons du spectre solaire, bien définis par les lignes fixes de Fraunhofer.

On remarque ensuite des séries d'observations spéciales faites sur les rayons particuliers émis par les flammes sous l'influence de corps divers réduits en vapeur. On sait que MM. Kirchhoff et Bunsen ont montré que, dans ces circonstances, il y a des rayons caractéristiques de certaines substances, et que, sur ce principe, ils ont fondé une méthode d'une délicatesse extrême, propre à déceler la présence de divers corps simples ou composés. Les propriétés de ces rayons doivent donc intéresser à la fois les chimistes et les physiciens; et la détermination de leurs longueurs d'onde, pour la plupart tout à fait inconnues, est certainement un résultat très-important du nouveau travail. Les observations rapportées dans le Mémoire comprennent les spectres de l'hydrogène, du lithium, du calcium, du strontium, du magnésium, de l'argent, du zinc et du cadmium. Mais ce qui présente un intérêt au moins égal, et ce qui montre peut-être encore mieux l'habileté de l'auteur, c'est d'avoir pu aborder avec succès la mesure des longueurs d'onde des rayons ultra-violets, c'est-à-dire de ces radiations si nombreuses et si variées douées de réfrangibilités plus grandes que le vio-

let, et qui s'étendent, dans certains cas, à une distance considérable au delà du spectre visible.

La manière dont ces rayons sont distribués, ainsi que leurs propriétés physiques si singulières, avaient été déjà signalées et étudiées principalement par M. Edmond Becquerel. Mais leurs longueurs d'onde n'avaient pas encore été mesurées par la méthode si précise des réseaux. On possédait seulement une première détermination obtenue par M. Esselbach, au moyen d'une méthode différente, celle des spectres à bandes d'interférence.

Les difficultés que présentaient ces mesures délicates n'ont pu être surmontées par l'auteur qu'au moyen de plusieurs artifices ingénieux décrits dans le Mémoire, et que nous ne pouvons que mentionner ici. Il convient cependant de citer comme essentiel un petit appareil désigné par l'auteur sous le nom d'*oculaire photographique*. C'est une petite glace recouverte de collodion sensibilisé, glace que l'on peut substituer à l'oculaire de la lunette, en la plaçant derrière les fils du réticule; on peut, par ce moyen, mesurer les déviations des rayons invisibles avec une exactitude peu inférieure à celle qu'on obtient pour les rayons visibles.

L'auteur a effectué ces mesures sur les spectres ultra-violets de la lumière solaire et de la lumière du cadmium. Ce dernier spectre est surtout remarquable en raison de l'étendue extraordinaire occupée par les radiations invisibles.

Les longueurs d'onde obtenues dans cette région vont en diminuant d'une manière continue depuis $0^{mm},0003967$ (raie H) jusqu'à $0^{mm},0002217$ (rayons extrêmes). La valeur de ce décroissement a été comparée par l'auteur aux accroissements de réfraction des mêmes rayons lorsqu'ils traversent un prisme de spath d'Islande; il ressort de cette comparaison que pour ces rayons les plus réfrangibles une faible variation dans la longueur d'onde correspond à un accroissement considérable de l'indice de réfraction. Ce résultat, appuyé de données numériques précises, ne peut manquer de contribuer aux progrès de la théorie de la dispersion. On peut remarquer qu'il est bien d'accord avec la dispersion rapidement croissante du rouge au violet dans les spectres réfractés, ainsi qu'avec les déterminations antérieures relatives aux rayons calorifiques obscurs situés à l'extrémité opposée du spectre,

dans la région ultra-rouge. Là, en effet, les longueurs d'onde varient très-rapidement pour des changements relativement très-faibles dans les indices.

L'auteur fait observer que les ondes les plus courtes, $0^{mm},00022$, comparées aux ondes les plus longues des rayons visibles, $0^{mm},00076$ (raie A), forment dans l'échelle des vibrations une étendue de près de deux octaves, dont le rapport est $1:4$; on peut ajouter que cette étendue dépasserait trois octaves, dont le rapport est $1:8$, si l'on considérait les ondes les plus longues, $0^{mm},00190$, des derniers rayons calorifiques obscurs qui ont pu être observés.

Enfin, dans une dernière partie, l'auteur expose les observations spéciales qu'il a faites pour rapporter au mètre toutes les mesures données dans le Mémoire. Il montre qu'il suffisait, pour atteindre ce but, de mesurer directement en fractions de l'unité métrique une seule longueur d'onde, celle de la raie D par exemple, celle de tous les autres rayons se trouvant alors, d'après la méthode, elle-même exprimée en fractions de la même unité.

Le résultat final obtenu par l'auteur est $0^{mm},0005888$ pour la longueur d'onde de la raie D rapportée au millimètre.

Ce nombre concorde exactement avec celui que les physiciens avaient adopté d'après Fraunhofer, tout en souhaitant depuis longtemps qu'il pût être soumis à un contrôle aussi direct et aussi rigoureux. On pourra donc l'employer désormais avec une sécurité plus grande encore dans les applications nombreuses auxquelles se prête si bien la lumière jaune du sodium, particulièrement pour la mesure d'autres longueurs très-petites.

En résumé, le Mémoire n° 1 est certainement le travail le plus approfondi et le plus satisfaisant qui ait été fait depuis Fraunhofer, relativement aux longueurs d'onde des divers rayons qui composent la lumière. De l'avis de tous vos Commissaires, ce travail révèle chez son auteur des connaissances théoriques distinguées et une grande habileté expérimentale. On pouvait souhaiter, sans doute, qu'il eût employé quelque autre méthode d'observation concurremment avec celle des réseaux. Cependant son Mémoire a fait faire à la question des progrès si considérables, que votre Commission s'est trouvée unanime pour lui décerner le prix.

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT VIBRATOIRE D'UNE CORDE

FORMÉE DE PLUSIEURS PARTIES DIVERSES DE NATURE,

PAR M. J. BOURGET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

INTRODUCTION.

J'ai démontré, dans un travail précédent (*), que les figures nodales des membranes circulaires vibrantes ne se produisent pas aux intervalles musicaux assignés par la théorie. Cette différence entre l'expérience et le calcul ne tient pas à la forme des membranes; elle ne tient pas non plus à la forme ni à la nature des cadres employés; nous l'avons démontré, M. Félix Bernard et moi, dans un Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes carrées (**). En étudiant depuis cette anomalie, j'ai reconnu qu'on peut en formuler les lois expérimentales en supposant que les nombres théoriques de vibrations, correspondants aux figures nodales diverses, éprouvent tous une diminution.

Comment expliquer cet abaissement des sons? On pourrait croire qu'il tient à la mobilité des points d'attache de la membrane. La théorie suppose les bords du cadre parfaitement immobiles; or, on démontre par expérience que cette immobilité n'est pas absolue. Si l'on tient

(*) Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, t. III; 1866.

(**) Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes carrées, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LX.

à la main le cadre d'une membrane tendue au-dessus d'un tuyau d'orgue de hauteur convenable, on le sent vibrer avec vivacité au moment de la formation des figures nodales nettes. Les points d'attache du cadre avec la membrane ne sont donc pas des nœuds parfaits; la membrane n'est donc qu'approximativement dans les conditions exigées par la théorie. Je me suis proposé de soumettre au calcul l'influence de la mobilité des points d'attache, afin de savoir si on peut lui attribuer l'anomalie en question; telle est l'origine première du travail que je présente aujourd'hui à l'Académie.

J'ai dû d'abord résoudre un problème analogue plus simple relatif aux cordes vibrantes, car les mêmes causes de perturbations doivent produire sur elles des effets semblables. Supposons une corde formée de trois parties de natures différentes, et cherchons les lois du mouvement vibratoire de cet ensemble. Exprimons ensuite que les deux parties extrêmes se réduisent à des longueurs extrêmement petites, la corde du milieu sera *physiquement* toute la partie vibrante, et ses extrémités seront attachées à deux points mobiles. Tel est le type théorique que j'ai imaginé et qui me semble correspondre assez bien à une corde vibrante dont les points d'attache ne sont pas parfaitement fixes.

En dehors du but spécial de mes recherches, la question des cordes hétérogènes m'a paru intéressante en elle-même, et je lui ai donné tout le degré de généralité qu'elle comporte. Je traite donc ici du mouvement vibratoire d'une corde formée d'un nombre quelconque de parties diverses de nature.

Poisson, et antérieurement Bernoulli et Euler, se sont occupés du problème relatif à une corde formée de deux parties (*). J'en donne une solution plus simple et je rectifie l'expression des coefficients de l'intégrale générale (*Mémoire de Poisson*, p. 462), au dénominateur desquels s'est glissée une erreur, sans influence d'ailleurs sur les conséquences physiques. J'adopte avec Poisson l'hypothèse qu'au point de jonction de deux parties la tangente est la même à toute époque du mouvement pour les deux courbes qu'elles forment chacune. Je regarde comme inexacte la proposition suivante, énoncée par l'illustre géomètre à la page 473 de son Mémoire : *Les nombres de vibrations des*

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XI.

harmoniques de la corde totale étant en général incommensurables, il arrivera que si la corde a été ébranlée au hasard, elle n'exécutera pas de vibrations isochrones et ne fera entendre qu'une sorte de bruit au lieu d'un son régulier. Le calcul montre qu'un ébranlement produit au hasard donne lieu à un nombre infini de mouvements simples, constituant par leur superposition le mouvement général, que les harmoniques soient ou ne soient pas commensurables. Théoriquement les vibrations de la corde totale ne seront pas isochrones s'il y a incommensurabilité; mais l'oreille, qui ne perçoit pas le mouvement général autrement que par le timbre, qui le décompose instinctivement en mouvements simples, n'en distinguera pas moins dans ce cas les divers sons qui leur correspondent, et aussi nettement que s'ils étaient commensurables.

Ajoutons qu'en réalité il n'y a pas, au point de vue physique, de quantités incommensurables; par conséquent les harmoniques irrationnels que le calcul donne sont entre eux sensiblement comme des nombres entiers. Donc le mouvement de la corde est toujours sensiblement périodique, quel que soit l'état initial, et l'expérience montre même que les sons autres que le son fondamental s'éteignent rapidement, en sorte que le mouvement de la corde partant d'un état initial quelconque se réduit bientôt au mouvement simple qui correspond au son le plus bas.

Voici les lois les plus importantes que le calcul donne pour le cas de deux parties :

1° *Les harmoniques ou sons possibles de la corde totale ne forment pas la série* 1, 2, 3.... *Les nombres de vibrations de ces harmoniques sont en général incommensurables et racines d'une équation transcendante.*

2° *Si l'on connaît les longueurs des deux parties et les sons fondamentaux de chacune, on peut trouver les divers sons de la corde totale au moyen de la résolution d'une équation transcendante.*

3° *Lorsque les deux parties rendent isolément chacune le même son, la corde entière est à l'octave grave. Cette loi renferme, comme cas particulier, l'une des lois connues des cordes homogènes, savoir, qu'une corde est à l'octave grave de sa moitié.*

4° *S'il existe des nœuds de vibration, ils sont équidistants sur chacune des cordes à partir des extrémités fixes, mais la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre.*

5° *Si l'on suppose l'une des parties extrêmement petite, l'autre peut être regardée comme la corde vibrante, et l'on a ainsi un type théorique assimilable à une corde vibrant entre deux extrémités dont l'une ne serait pas parfaitement fixe. Dans cette hypothèse on trouve pour les divers harmoniques la série*

$$N - \varepsilon_1, \quad 2N - \varepsilon_2, \quad 3N - \varepsilon_3, \ldots,$$

N *désignant le son fondamental de la corde quand les deux extrémités sont parfaitement fixes;* ε_1, ε_2, ε_3,... *étant des quantités très-petites croissantes. On voit donc que les divers sons de la corde se trouvent un peu abaissés par suite de la mobilité d'un point d'attache. On pouvait facilement le prévoir, car il semble que les choses doivent alors se passer comme si la longueur de la corde était plus grande; toutefois le calcul de mon Mémoire était nécessaire pour la rigueur de la démonstration, parce qu'il faut continuer la corde par un corps mobile d'une autre nature.*

On passe facilement au cas de trois, quatre,... parties hétérogènes. Mais l'équation transcendante qui donne les divers harmoniques et les nœuds devient de plus en plus compliquée et difficile à résoudre. On peut cependant énoncer pour le cas de trois parties quelques lois simples, faciles à vérifier.

1° *Comme précédemment, on peut calculer le son fondamental et les harmoniques successifs irrationnels entre eux, quand on connaît les longueurs et les sons fondamentaux de chacune des parties.*

2° *S'il y a des nœuds, ils sont équidistants sur chacune des cordes; mais la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre. Le calcul fait connaître la position des nœuds correspondant à un harmonique donné.*

3° *Si les trois parties, prises isolément, rendent le même son, la théorie fait connaître par un calcul très-simple celui de la corde totale, qui est en général incommensurable avec le premier.*

4° *Dans le cas plus particulier où les points de jonction des parties diviseraient la longueur totale harmoniquement, c'est-à-dire de telle sorte que le produit de la partie moyenne par la corde totale fût égal au produit des cordes extrêmes, le son de la corde totale serait la double octave grave du son de chaque partie. Cette loi assez remarquable offre peut-être la première application physique de la division harmonique d'une droite.*

5° *Si l'on suppose très-petites les parties extrêmes, la corde moyenne peut être regardée physiquement comme seule vibrante, et l'on a un type théorique se rapprochant d'une corde dont les points d'attache seraient mobiles. On trouve alors que les sons de la corde forment la série*

$$N - \varepsilon_1,\quad 2N - \varepsilon_2,\quad 3N - \varepsilon_3, \ldots,$$

N *désignant le son fondamental quand les extrémités sont fixes, et* ε_1, ε_2, ε_3,... *des quantités petites croissantes. Donc la mobilité des points d'attache abaisse tous les sons d'une corde.*

Il semble que l'on tienne la clef des anomalies que les membranes présentent; mais en examinant de plus près on reconnaît que dans le cas des cordes

$$\frac{2N - \varepsilon_2}{N - \varepsilon_1} < 2,\quad \frac{3N - \varepsilon_3}{N - \varepsilon_1} < 3, \ldots;$$

donc, en prenant deux sons correspondants à deux figures nodales, l'intervalle musical est moindre que si les extrémités étaient fixes. Or, dans l'anomalie des membranes, c'est le contraire qui a lieu : l'intervalle musical qui sépare deux figures nodales est toujours plus grand que celui de la théorie. Cette dernière perturbation n'est donc pas due à la mobilité des points d'attache de la membrane.

Mon Mémoire se termine par des expériences destinées à vérifier les lois du calcul. J'indique les précautions que j'ai prises pour l'évaluation des diverses données du calcul, et pour la mesure du nombre de vibrations. J'ai pu effectuer toutes mes déterminations avec une précision assez grande au moyen d'un sonomètre construit par M. König, et mis à ma disposition par la libéralité de l'Association Scientifique.

Le calcul des racines de l'équation transcendante, qui varie dans chaque expérience, est ce qu'il y a de plus pénible dans ces recherches. J'ai fait usage de constructions graphiques pour avoir une première approximation; la règle de Newton peut servir ensuite à compléter la résolution.

Le tableau résumé de toutes mes expériences montre que l'accord avec la théorie est aussi satisfaisant que possible.

§ Ier. — *Mouvement vibratoire d'une corde formée de deux parties diverses de nature.*

1. *Notations. Équations différentielles.* — Soit AB (*fig.* 1, *Pl. I*) une corde tendue entre les deux points fixes A et B. Supposons qu'elle soit formée de deux parties AA′ et A′B différentes, soit par la nature de la matière, soit par le diamètre seulement. Nous admettrons que le mouvement oscillatoire s'exécute dans le plan YAX, qui contient la position AB d'équilibre; cette droite AB est prise pour axe des x. Le mouvement le plus général peut être regardé comme le résultat de la superposition de deux mouvements plans indépendants qui s'exécuteraient dans les deux plans rectangulaires YAX, ZAX. Il suffit donc d'étudier l'un d'eux.

Nommons:

l la longueur AA′;
l' la longueur A′B;
x la distance au point A d'un point quelconque de l;
x' la distance au point A′ d'un point quelconque de l';
k le poids de l;
k' le poids de l';
P le poids qui représente la tension de l à l'état d'équilibre;
P′ le poids qui représente celle de l';
y le déplacement transversal d'un point de l dans le plan YAX;
y' le déplacement transversal d'un point de l'.

Posons

$$a^2 = \frac{Pgl}{k}, \quad a'^2 = \frac{P'gl'}{k'}, \quad g = 9{,}8088; \tag{1}$$

les équations différentielles du mouvement vibratoire seront, comme on sait (*),

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = a'^2\frac{d^2y'}{dx'^2}; \tag{2}$$

(*) Mémoire de Poisson, *Journal de l'École Polytechnique*, t. XI, p. 446. — *Théorie de l'élasticité*, de Lamé, 2e édit., p. 102.

la première des équations (2) se rapporte à la première partie l de la corde, la seconde à l'autre partie l'.

Nous admettrons avec Poisson qu'au point de jonction A' les deux courbes formées par les cordes AA', A'B ont la même tangente à toute époque du mouvement.

Poisson suppose $P = P'$. Il en serait ainsi dans le cas où les cordes seraient parfaitement flexibles; mais on sait, par les expériences du colonel Savart (*), que les cordes vibrantes ont toujours une rigidité propre indépendamment de celle que donne le poids tenseur, et M. Duhamel a démontré que pour rétablir l'accord entre l'expérience et la théorie, il suffit de supposer le poids tenseur augmenté d'un poids représentant cette rigidité propre. On doit donc regarder comme généralement inégales les tensions P et P' des deux cordes.

Il s'agit maintenant d'intégrer les équations (2) en tenant compte des conditions aux limites A, A', B et des conditions initiales.

2. *Conditions aux limites.* — Faisons usage du signe de substitution introduit par Sarrus et posons avec lui

$$(3) \qquad \Big|^{a} F(x) = F(a), \qquad \Big|_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a),$$

les conditions aux limites seront données par le tableau suivant:

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. VI.

$$
(4)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\text{Quel que soit } t:} \\
\text{Au point A....} & \left\{ \begin{array}{l} \int^{0} y = 0, \\ \int^{0} \dfrac{dy}{dt} = 0; \end{array} \right. \\
\text{Au point A'...} & \left\{ \begin{array}{l} \int^{l} y = \int^{0} y', \\ \int^{l} \dfrac{dy}{dt} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dt}, \\ \int^{l} \dfrac{dy}{dx} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dx'}; \end{array} \right. \\
\text{Au point B. ..} & \left\{ \begin{array}{l} \int^{l'} y' = 0, \\ \int^{l'} \dfrac{dy'}{dt} = 0. \end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

Ces conditions expriment l'immobilité des extrémités et le raccordement des deux parties de la corde au point de jonction A'.

3. *Conditions initiales.* — Nous admettrons qu'à l'origine du temps la corde écartée de sa position d'équilibre a reçu une forme quelconque, et que chacun des points a été lancé dans le plan YAX de la courbe avec une vitesse arbitraire. Les conditions initiales seront donc données par le tableau suivant :

$$
(5)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{\text{pour } t = 0,} \\
y = F(x), & y' = F_1(x'), \\
\dfrac{dy}{dt} = f(x), & \dfrac{dy'}{dt} = f_1(x');
\end{array}
\right.
$$

F, f, F_1, f_1 désignent des fonctions arbitraires satisfaisant pourtant aux conditions aux limites (4).

4. *Solutions simples particulières.* — Ne nous occupons pas d'abord des conditions initiales ; nous pourrons satisfaire aux équations (2)

et (4) par des solutions particulières de la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} y = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u, \\ y' = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u', \end{cases}$$

A, B, λ étant des constantes; u et u' étant respectivement des fonctions de x et de x' satisfaisant aux équations différentielles

$$(7)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}u = 0, \quad \frac{d^2u'}{dx'^2} + \frac{\lambda^2}{a'^2}u' = 0.$$

De ces dernières on déduit

$$(8)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{P}\sin\dfrac{\lambda x}{a} + \mathrm{Q}\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = \mathrm{P}'\sin\dfrac{\lambda x'}{a'} + \mathrm{Q}'\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}, \end{cases}$$

P, Q, P′, Q′ étant des constantes arbitraires. Si l'on veut maintenant satisfaire aux conditions aux limites, il faudra choisir P, Q, P′, Q′, λ de manière à rendre identiques les relations

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{Q} = 0, \\ \mathrm{P}\sin\dfrac{\lambda l}{a} = \mathrm{Q}', \\ \dfrac{\mathrm{P}}{a}\cos\dfrac{\lambda l}{a} = \dfrac{\mathrm{P}'}{a'}, \\ \mathrm{P}'\sin\dfrac{\lambda l'}{a'} + \mathrm{Q}'\cos\dfrac{\lambda l'}{a'} = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent que le nombre P reste arbitraire; nous le prendrons égal à $\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}$; nous aurons donc

$$\begin{cases} \mathrm{P} = \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, & \mathrm{Q} = 0, \\ \mathrm{P}' = \dfrac{a'}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}\cos\dfrac{\lambda l}{a}, & \mathrm{Q}' = \sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, \\ a\sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda l'}{a'} + a'\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'} = 0; \end{cases}$$

la dernière de ces équations fait connaître la valeur de λ, les autres déterminent les valeurs correspondantes de P, Q, P', Q'. On voit donc que les intégrales particulières satisfaisant aux conditions aux limites seront en résumé :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u,\\ y' &= (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u',\\ u &= \sin\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda x}{a},\\ u' &= \sin\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda(l'-x')}{a'},\end{aligned}\right.$$

A et B étant des constantes arbitraires, et λ une des racines en nombre infini de l'équation transcendante

$$(11)\qquad a\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'} + a'\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'} = 0,$$

qu'on peut encore mettre sous la forme

$$(12)\qquad a\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda l}{a} + a'\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda l'}{a'} = 0.$$

Les solutions particulières (10) coïncident avec celles de Poisson, sauf une légère différence de notation. Elles correspondent à des mouvements vibratoires simples et possibles, résultant d'un état initial facile à trouver en y faisant $t = 0$. Mais comme cet état initial particulier serait impossible à réaliser dans la pratique, le mouvement observé est plus complexe que celui que les équations (10) définissent. Nous allons démontrer que le mouvement vibratoire le plus général peut être regardé comme résultant de la superposition d'un nombre fini ou infini de ces mouvements simples; il nous suffira donc ensuite d'étudier les propriétés des équations (10) pour connaître toutes les lois physiques, perceptibles à l'oreille, du mouvement vibratoire des cordes à deux parties hétérogènes ébranlées d'une manière quelconque.

5. *Intégrale générale.* — Pour arriver rapidement à l'intégrale générale, nous établirons un lemme préliminaire.

Lemme. — *Nommons u_1, u'_1 les valeurs des fonctions u, u' pour une*

racine λ_1 autre que λ de l'équation transcendante (11): *on a identiquement la relation*

$$\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx' = 0.$$

En effet, des équations (7), auxquelles satisfont u, u_1, u', u'_1, nous tirons

$$\int_0^l \left(u_1\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)dx + \frac{1}{a^2}(\lambda^2-\lambda_1^2)\int_0^l uu_1\,dx = 0,$$

et en intégrant

$$\Big|_0^l \left(u_1\frac{du}{dx} - u\frac{du_1}{dx}\right) + \frac{1}{a^2}(\lambda^2-\lambda_1^2)\int_0^l uu_1\,dx = 0,$$

de même

$$\Big|_0^{l'} \left(u'_1\frac{du'}{dx'} - u'\frac{du'_1}{dx'}\right) + \frac{1}{a'^2}(\lambda^2-\lambda_1^2)\int_0^{l'} u'u'_1\,dx' = 0;$$

de là

$$(\lambda^2-\lambda_1^2)\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx'\right)$$
$$= \Big|_0^l \left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right) + \Big|_0^{l'} \left(u'\frac{du'_1}{dx'} - u'_1\frac{du'}{dx'}\right);$$

mais les conditions aux limites donnent

$$\Big|^0 \left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right) = 0,$$

$$\Big|^l \left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right) = \Big|^0 \left(u'\frac{du'_1}{dx'} - u'_1\frac{du'}{dx'}\right),$$

$$\Big|^{l'} \left(u'\frac{du'_1}{dx'} - u'_1\frac{du'}{dx'}\right) = 0,$$

donc

$$\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx' = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, je dis qu'en désignant par $\sum$ la somme des termes tels

que (10) correspondants aux diverses racines en nombre infini de l'équation (11), l'intégrale générale satisfaisant aux conditions initiales arbitraires sera donnée par des équations de la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} y = \sum (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u, \\ y' = \sum (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u'. \end{cases}$$

Il suffit pour cela de démontrer que l'on peut choisir les constantes A et B de chacun des termes de la série, de manière à avoir les identités

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum \mathrm{B}u = \mathrm{F}(x), & \sum \mathrm{B}u' = \mathrm{F}_1(x'), \\ \sum \mathrm{A}\lambda u = f(x), & \sum \mathrm{A}\lambda u' = f_1(x'). \end{cases}$$

Or, multiplions respectivement par $u\,dx$, $u'\,dx'$ les deux équations qui renferment B; intégrons et ajoutons, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a'^2}$, nous aurons, en séparant les divers termes du premier membre,

$$\mathrm{B}\left[\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'\right] + \mathrm{B}_1\left[\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx'\right] + \ldots$$
$$= \frac{1}{a^2}\int_0^l u\mathrm{F}(x)dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\mathrm{F}_1(x')dx'.$$

Mais, en vertu du lemme démontré, tous les termes du premier membre autres que le premier sont identiquement nuls; donc

$$(15)\qquad \mathrm{B} = \frac{\frac{1}{a^2}\int_0^l u\mathrm{F}(x)dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\mathrm{F}_1(x')dx'}{\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'};$$

on trouverait de même

$$(16)\qquad \mathrm{A}\lambda = \frac{\frac{1}{a^2}\int_0^l uf(x)dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'f_1(x')dx'}{\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx'}.$$

Les formules (15) et (16) déterminent sans impossibilité, au moyen des conditions initiales, les divers coefficients de chacun des termes des séries (13) relatif à chacune des racines λ. Donc le mouvement le plus général résulte bien de la superposition d'une infinité de mouvements simples définis chacun par les équations (10), et comme notre organe d'audition décompose instinctivement le mouvement général en d'autres plus simples ne donnant lieu qu'à un son, on voit qu'au point de vue de l'acoustique physique les intégrales particulières (10) sont seules intéressantes. Il était néanmoins nécessaire d'étudier l'intégrale complète, afin d'être assuré que les mouvements représentés par (10) sont les seuls qui composent le mouvement général.

Nous pourrions effectuer les quadratures des dénominateurs dans les formules (15) et (16), nous verrions alors en quoi consiste l'erreur de celles de Poisson. On remarquera d'ailleurs combien notre analyse est plus simple que celle de l'illustre géomètre, grâce au lemme préliminaire que nous avons démontré ci-dessus.

6. *Propriétés générales des mouvements simples.* — En nous reportant aux équations (10) nous voyons que tout mouvement simple est périodique. Le temps d'une période complète est donné par

$$\lambda \varpi = 2\pi, \quad \text{d'où} \quad \varpi = \frac{2\pi}{\lambda};$$

par conséquent le son correspondant à ce mouvement, ou le nombre de vibrations doubles exécutées par seconde, sera

$$\mathcal{N} = \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{17}$$

Ainsi, à chaque λ correspond un état vibratoire simple qui pourrait exister seul, qui existe dans le mouvement général et qui donne lieu à un son unique proportionnel à ce nombre λ. Nous employons ici le mot *son* comme synonyme de *nombre de vibrations*.

Les constantes A et B sont dépendantes de l'état initial; il est facile d'en trouver la signification. Dans un plan perpendiculaire à la corde au point M (*fig.* 2, *Pl. I*) traçons deux droites rectangulaires MH, MK. Sur l'une portons $MB = B.u$, sur l'autre $MA = A.u$. La diagonale MC

du rectangle sera

$$MC = u\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Soit t le temps compté à partir du commencement d'une vibration, λt est un certain angle qui varie de o à 2π dans le temps d'une vibration complète; soit MG une ligne telle, que GMH soit égal à λt; il est facile de voir que la projection MD de MC est égale à la somme des projections de MA et MB, donc

$$MD = Au\sin\lambda t + Bu\cos\lambda t = y.$$

Ainsi MD représente l'écartement de la molécule M relativement à sa position d'équilibre. De là résulte que cet écartement a pour valeur limite $MC = u\sqrt{A^2 + B^2}$. Donc les constantes A et B règlent l'***amplitude*** du mouvement vibratoire, et par conséquent l'***intensité*** du son correspondant.

Le nombre λ, qui donne la ***hauteur*** du son (17), est racine de l'équation transcendante (11). On peut la transformer en une autre plus commode pour les applications. On sait, par la théorie des cordes simples, qu'en nommant n le nombre des vibrations complètes exécutées par une corde de longueur l entre deux points fixes, on a

$$n = \frac{a}{2l};$$

donc, en désignant par n et n' les sons fondamentaux des deux parties de la corde en question, on a

(18) $$a = 2nl, \quad a' = 2n'l',$$

et l'équation transcendante (11) devient

(19) $$nl\sin\frac{\lambda}{2n}\cos\frac{\lambda}{2n'} + n'l'\cos\frac{\lambda}{2n}\sin\frac{\lambda}{2n'} = 0$$

ou

(19 *bis*) $$nl\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda}{2n} + n'l'\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda}{2n'} = 0.$$

L'équation (19) montre que *le son de la corde totale ne dépend que des longueurs des parties et des sons qu'elles rendent chacune.*

De plus, on voit qu'en général les valeurs de λ seront incommensurables entre elles et avec les nombres n et n'; donc *les divers harmoniques ou sons possibles d'une corde formée de deux parties de natures différentes ne sont plus les termes de la série* 1, 2, 3,..., *comme ceux d'une corde simple.*

Pour résoudre facilement l'équation (19) on peut poser

$$\frac{\lambda}{2n} = x; \tag{20}$$

elle devient

$$\operatorname{tang} x + \frac{n'l'}{nl} \operatorname{tang} \frac{nx}{n'} = 0; \tag{21}$$

on trouve une première approximation des diverses valeurs de x en construisant les deux courbes

$$\left\{\begin{aligned} y &= \operatorname{tang} x, \\ y &= -\frac{n'l'}{nl} \operatorname{tang} \frac{nx}{n'}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

On peut ensuite par divers moyens pousser plus loin l'approximation, si on le juge nécessaire. Quand x est trouvé, on en déduit

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{nx}{n'}. \tag{23}$$

C'est par cette méthode que j'ai calculé les divers nombres mentionnés dans les expériences qui se trouvent à la fin du Mémoire.

On a les nœuds relatifs à un mouvement simple en posant

$$u = \sin \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda x}{a} = 0,$$

$$u' = \sin \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda(l' - x')}{a'} = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$\left\{\begin{aligned} x &= i \frac{n}{\mathfrak{N}} l, \\ l' - x' &= i' \frac{n'}{\mathfrak{N}} l'. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

i, i' désignent des nombres entiers et positifs qui peuvent être nuls; $\mathfrak{N}$ le son considéré correspondant au λ choisi. La première des équations (24) donne la distance des nœuds de la première corde au point A, la seconde fait connaître la distance des nœuds de l'autre partie au point B. Comme on doit avoir

$$x \leqq l, \quad l' - x' \leqq l',$$

le nombre des nœuds est limité pour chaque valeur de λ ou de $\mathfrak{N}$. On voit aussi que *les nœuds sont équidistants sur chacune des cordes; mais que la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre.*

7. *Cas particulier d'une corde simple.* — Nous pouvons supposer que le point A' sépare les deux parties d'une corde homogène, et nous devons, dans cette hypothèse, retrouver, comme vérification de nos calculs, les formules connues de ce cas simple.

Si les deux parties l et l' sont identiques de nature, on a $a = a'$, et l'équation transcendante (11) donne

$$\sin \frac{\lambda(l + l')}{a} = 0,$$

d'où, en désignant par L la longueur totale,

$$\frac{\lambda L}{a} = i\pi,$$

le nombre i étant l'un des termes de la série 1, 2, 3.... Les diverses valeurs de λ sont dans ce cas

$$\lambda = \frac{a\pi}{L}, \quad 2\frac{a\pi}{L}, \quad 3\frac{a\pi}{L}, \ldots,$$

et les divers sons de la corde

$$(25) \qquad \mathfrak{N} = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}, \ldots \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Remarquons en passant que ce résultat suppose seulement $a = a'$, ou

$$\frac{Pl}{k} = \frac{P'l'}{k'}; \tag{26}$$

il subsisterait donc dans le cas où pour deux parties de natures différentes cette relation serait satisfaite, ce qui ne présente aucune impossibilité.

8. *Cas particulier où les deux parties rendraient le même son.* — Il faut supposer dans l'équation (19) $n = n'$. Elle devient

$$\sin\frac{\lambda}{2n}\cos\frac{\lambda}{2n} = 0, \tag{27}$$

d'où

$$\frac{\lambda}{2n} = i\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = i\frac{n}{2},$$

i étant l'un des termes de la série 1, 2, 3.... Donc les divers sons possibles de la corde sont

$$\mathcal{N} = \frac{n}{2},\quad 2\frac{n}{2},\quad 3\frac{n}{2},\ldots; \tag{28}$$

donc *le son fondamental de la corde totale est à l'octave grave de chacune des parties.*

Pour une corde homogène on sait qu'elle est à l'octave grave de sa moitié. Cette loi est évidemment comprise dans la précédente comme cas particulier.

9. *Cas où l'une des parties est très-petite.* — Supposons l' très-petit, et, pour fixer les idées, admettons que $l + l' = \text{L}$ soit constant à mesure que nous ferons tendre l' vers zéro. Les produits nl, $n'l'$ resteront constants en vertu des équations (18), le nombre n tendra vers la limite $\frac{a}{2\text{L}}$ et le nombre n' croîtra indéfiniment. Donc les valeurs de x fournies par l'équation

$$\tang x + \frac{n'l'}{nl}\tang\frac{nx}{n'} = 0 \tag{29}$$

tendront vers les racines de l'équation

$$\tan x = 0. \tag{30}$$

On se rapprochera donc indéfiniment du cas où une corde unique est tendue entre deux point fixes A et B. Quand l' est très-petit sans être nul, on voit, en construisant les deux courbes

$$y = \tan x, \quad y = -\frac{n'l'}{nl} \tan \frac{nx}{n'}, \tag{31}$$

comment sont modifiées les racines de l'équation (30).

La courbe dont le trait est plein (*fig.* 3, *Pl. I*) représente l'équation $y = \tan x$. La seconde a pour tangente à l'origine OT, dont l'équation est

$$\frac{x}{y} = -\frac{l'}{l},$$

et à la limite cette quantité $\frac{l'}{l}$ est nulle. D'un autre côté, l'ordonnée y de la seconde courbe devient infinie pour

$$x = \frac{n'}{n} \frac{\pi}{2},$$

quantité qui a pour limite ∞. Donc la seconde courbe *on*, donnée par l'équation

$$y = -\frac{n'l'}{nl} \tan \frac{nx}{n'},$$

se confond longtemps avec sa tangente OT, et s'abaisse peu au-dessous de cette ligne pour les premières valeurs de x; donc les racines de l'équation transcendante sont

$$OK_1 = \pi - \delta_1, \quad OK_2 = 2\pi - \delta_2, \quad OK_3 = 3\pi - \delta_3, \ldots,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ étant de petites quantités. Donc les sons rendus par une corde dont une des extrémités n'est pas immobile sont

$$\mathfrak{N} = N - \varepsilon_1, \quad 2N - \varepsilon_2, \quad 3N - \varepsilon_3, \ldots,$$

N étant le son fondamental quand les deux extrémités sont fixes, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ de petites quantités.

Remarquons maintenant que

$$\delta_2 > 2\delta_1, \quad \delta_3 > 3\delta_1, \ldots,$$

que par suite

$$\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 > 3\varepsilon_1, \ldots.$$

Il faut en conclure que les harmoniques successifs sont moins distants qu'ils ne le seraient si les deux extrémités étaient absolument fixes.

L'anomalie qui résulterait pour une corde de la mobilité des extrémités serait donc en sens contraire de celle que l'observation a fait connaître pour les membranes. Je pense donc que la mobilité des points d'attache de la membrane ne peut pas en donner la raison.

§ II. — *Mouvement vibratoire d'une corde formée de trois parties diverses de nature.*

10. *Équations différentielles.* — Nous conserverons les notations précédentes et nous marquerons de deux accents les quantités qui se rapportent à la troisième corde. Les longueurs x, x', x'' seront comptées respectivement à partir des points A, A′, A″ (*fig.* 4, *Pl. I*). Les deux points A et B sont les extrémités fixes. Les longueurs des parties seront l, l', l'', leurs sons fondamentaux seront n, n', n''.

Les équations différentielles à intégrer sont

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = a'^2 \frac{d^2 y'}{dx'^2}, \quad \frac{d^2 y''}{dt^2} = a''^2 \frac{d^2 y''}{dx''^2}, \tag{32}$$

dans lesquelles

$$a^2 = \frac{Pgl}{k}, \quad a'^2 = \frac{P'gl'}{k'}, \quad a''^2 = \frac{P''gl''}{k''}; \tag{33}$$

il faut joindre à ces équations les conditions aux limites et les conditions initiales.

11. *Conditions aux limites.* — Ces conditions expriment que les extrémités A et B sont fixes, et qu'aux points de jonction A′ et A″ les courbes des fils se raccordent à toute époque. On peut les résumer dans le tableau suivant.

Quel que soit t :

$$
(34)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Au point A}\ldots & \left\{ \begin{array}{l} \int^{0} y = 0, \\[4pt] \int^{0} \dfrac{dy}{dt} = 0; \end{array} \right. \\[20pt]
\text{Au point A}'\ldots & \left\{ \begin{array}{l} \int^{l} y = \int^{0} y', \\[4pt] \int^{l} \dfrac{dy}{dt} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dt}, \\[4pt] \int^{l} \dfrac{dy}{dx} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dx'}; \end{array} \right. \\[30pt]
\text{Au point A}''\ldots & \left\{ \begin{array}{l} \int^{l'} y' = \int^{0} y'', \\[4pt] \int^{l'} \dfrac{dy'}{dt} = \int^{0} \dfrac{dy''}{dt}, \\[4pt] \int^{l'} \dfrac{dy'}{dx'} = \int^{0} \dfrac{dy''}{dx''}; \end{array} \right. \\[30pt]
\text{Au point B}\ldots & \left\{ \begin{array}{l} \int^{l''} y'' = 0, \\[4pt] \int^{l''} \dfrac{dy''}{dt} = 0. \end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

12. *Conditions initiales.* — Nous supposerons qu'à l'origine la corde a reçu un écartement quelconque, et que chacun des points a reçu dans le plan YABX, qui contenait la corde, une vitesse arbitraire. Les condi-

tions initiales sont donc

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{lll} & \text{pour } t = 0 : & \\ y = F(x), & y' = F_1(x'), & y'' = F_2(x''), \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x), & \dfrac{dy'}{dt} = f_1(x'), & \dfrac{dy''}{dt} = f_2(x''), \end{array}\right.$$

F, f, F_1, f_1, F_2, f_2 désignant des fonctions parfaitement arbitraires, mais satisfaisant pourtant aux conditions aux limites.

13. *Intégrales simples particulières.* — On peut satisfaire aux équations différentielles (32) par des solutions de la forme

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} y = (A \sin\lambda t + B\cos\lambda t)u, \\ y' = (A \sin\lambda t + B\cos\lambda t)u', \\ y'' = (A \sin\lambda t + B\cos\lambda t)u'', \end{array}\right.$$

u, u', u'' étant des fonctions satisfaisant aux équations différentielles

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2 u}{dx^2} + \dfrac{\lambda^2}{a^2} u = 0, \\ \dfrac{d^2 u'}{dx'^2} + \dfrac{\lambda^2}{a'^2} u' = 0, \\ \dfrac{d^2 u''}{dx''^2} + \dfrac{\lambda^2}{a''^2} u'' = 0, \end{array}\right.$$

et, par conséquent, étant données par les formules suivantes :

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} u = P \sin\dfrac{\lambda x}{a} + Q\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = P' \sin\dfrac{\lambda x'}{a'} + Q'\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}, \\ u'' = P'' \sin\dfrac{\lambda x''}{a''} + Q''\cos\dfrac{\lambda x''}{a''}. \end{array}\right.$$

Les quantités A, B, λ, P, Q, P', Q', P'', Q'' sont encore des constantes arbitraires.

Laissons de côté les conditions initiales (35) et cherchons à déterminer ces constantes de manière à satisfaire aux conditions aux limites.

Il est facile de voir qu'elles doivent vérifier les égalités du tableau suivant :

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}
&Q = o,\\
&P = \text{quant. arbitraire},\\
&P \sin\frac{\lambda l}{a} = Q',\\
&\frac{P}{a}\cos\frac{\lambda l}{a} = \frac{P'}{a'},\\
&P' \sin\frac{\lambda l'}{a'} + Q'\cos\frac{\lambda l'}{a'} = Q'',\\
&\frac{P'}{a'}\cos\frac{\lambda l'}{a'} - \frac{Q'}{a'}\sin\frac{\lambda l'}{a'} = \frac{P''}{a''},\\
&P''\sin\frac{\lambda l''}{a''} + Q''\cos\frac{\lambda l''}{a''} = o;
\end{aligned}\right.$$

de là nous tirons, en choisissant pour P la quantité $\sin\frac{\lambda l''}{a''}$ et après quelques réductions faciles,

$$(40)\quad\left\{\begin{aligned}
P &= \sin\frac{\lambda l''}{a''},\\
Q &= o,\\
P' &= \frac{a'}{a}\sin\frac{\lambda l''}{a''}\cos\frac{\lambda l}{a},\\
Q' &= \sin\frac{\lambda l''}{a''}\sin\frac{\lambda l}{a},\\
P'' &= \frac{a''}{a}\cos\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda l''}{a''} - \frac{a''}{a'}\sin\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda l''}{a''},\\
&= -\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}\cos\frac{\lambda l''}{a''} - \frac{a'}{a}\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}\cos\frac{\lambda l''}{a''},\\
Q'' &= \sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda l''}{a''} + \frac{a'}{a}\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda l''}{a''}.
\end{aligned}\right.$$

Le nombre λ est donné par l'équation transcendante

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}
o = {} & a\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}\cos\frac{\lambda l''}{a''} + a'\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}\cos\frac{\lambda l''}{a''}\\
&+ a''\cos\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda l''}{a''} - \frac{aa''}{a'}\sin\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}\sin\frac{\lambda l''}{a''}
\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(41\ bis)\qquad 0 = \operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a} + a'\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'} + a''\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''} - \frac{aa''}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''}.$$

Si maintenant nous portons, dans les équations (38), les valeurs des constantes P, Q, P′, Q′.... données par les équations (40), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles,

$$(42)\qquad \begin{cases} u = \sin\dfrac{\lambda l''}{a''}\sin\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = \sin\dfrac{\lambda l''}{a''}\left(\dfrac{a'}{a}\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda x'}{a'} + \sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}\right), \\ u'' = \left(\sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda l'}{a'} + \dfrac{a'}{a}\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}\right)\sin\dfrac{\lambda(l''-x'')}{a''}. \end{cases}$$

Les formules (42) unies aux formules (36) donnent des intégrales particulières satisfaisant à toutes les conditions aux limites. Chaque valeur de λ tirée de l'équation (41) fera connaître un système (36), (42), d'intégrales particulières, et les constantes A et B restent encore arbitraires pour chacun de ces mouvements simples.

14. *Intégrale générale.* — Ajoutons un nombre indéfini de solutions simples, correspondant chacune à une valeur λ différente, nous aurons encore une solution des équations différentielles (32), sous la forme

$$(43)\qquad \begin{cases} y = \sum(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u, \\ y' = \sum(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u', \\ y'' = \sum(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u''. \end{cases}$$

Nous allons démontrer qu'on peut choisir les constantes A, B, A_1, B_1, A_2, B_2, ... des divers termes, de manière à satisfaire à l'état initial arbitrairement donné, c'est-à-dire de façon à avoir identiquement

$$(44)\qquad \begin{cases} \sum Bu = F(x), & \sum A\lambda u = f(x); \\ \sum Bu' = F_1(x'), & \sum A\lambda u' = f_1(x'); \\ \sum Bu'' = F_2(x''), & \sum A\lambda u'' = f_2(x''). \end{cases}$$

En effet, multiplions respectivement les trois équations en B par

$$\frac{1}{a^2}u\,dx,\quad \frac{1}{a'^2}u'\,dx',\quad \frac{1}{a''^2}u''\,dx'',$$

intégrons respectivement de o à l, de o à l', de o à l'', et ajoutons membre à membre, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{B}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''^2dx''\right)\\
&+\mathrm{B}_1\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''u''_1dx''\right)\\
&+\mathrm{B}_2\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_2dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_2dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''u''_2dx''\right)\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&=\frac{1}{a^2}\int_0^l u\mathrm{F}(x)dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\mathrm{F}_1(x')dx + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''\mathrm{F}_2(x'')dx''.
\end{aligned}\right.$$

Mais, en raisonnant comme au § V, nous démontrerions que, si u_1, u'_1, u''_1 désignent les valeurs des fonctions u, u', u'', quand λ se change en une autre racine λ_1, on a identiquement

$$0=\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''u''_1dx'',$$

donc

$$(45)\quad \mathrm{B}=\frac{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l u\mathrm{F}(x)dx + \dfrac{1}{a'^2}\displaystyle\int_0^{l'} u'\mathrm{F}_1(x')dx' + \dfrac{1}{a''^2}\displaystyle\int_0^{l''} u''\mathrm{F}_2(x'')dx''}{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l u^2dx + \dfrac{1}{a'^2}\displaystyle\int_0^{l'} u'^2dx' + \dfrac{1}{a''^2}\displaystyle\int_0^{l''} u''^2dx''},$$

et de même

$$(46)\quad \mathrm{A}\lambda=\frac{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l uf(x)dx + \dfrac{1}{a'^2}\displaystyle\int_0^{l'} u'f_1(x')dx' + \dfrac{1}{a''^2}\displaystyle\int_0^{l''} u''f_2(x'')dx''}{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l u^2dx + \dfrac{1}{a'^2}\displaystyle\int_0^{l'} u'^2dx' + \dfrac{1}{a''^2}\displaystyle\int_0^{l''} u''^2dx''}.$$

Les équations (45) et (46) font connaître sans impossibilité les coeffi-

cients de chacun des termes des séries (43) qui donnent l'intégrale générale. On conclut de là que le mouvement le plus général, qui résulte d'un état initial quelconque, peut être regardé comme la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements simples de la forme (36), correspondants à des amplitudes diverses que l'état initial fait connaître au moyen des formules (45) et (46). On voit en même temps que l'état initial arbitrairement donné peut être regardé comme résultant de la superposition des états initiaux qui correspondent à chacun des mouvements simples (36).

15. *Propriétés générales des mouvements simples.* — Le mouvement défini par les équations (36) est périodique, et le son auquel il correspond est

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{47}$$

Les divers harmoniques d'une corde à trois parties sont donc proportionnels à λ, et par suite en général incommensurables.

Les valeurs de λ s'obtiennent en résolvant l'équation (41), qui, en posant

$$a = 2nl, \quad a' = 2n'l', \quad a'' = 2n''l'',$$

devient

$$\left\{\begin{aligned} 0 = nl \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n} + n'l' \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n'} + n''l'' \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n''} \\ - \frac{nn''}{n'}\frac{ll''}{l'} \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n} \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n'} \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n''}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Cette équation montre que les divers sons de la corde totale ne dépendent que des longueurs et des sons des parties; mais la loi de dépendance est si complexe, que jamais l'expérience ne pourrait à elle seule la découvrir.

Pour avoir les nœuds de vibration, on égalera à zéro les seconds membres des équations (42), et l'on trouvera

$$\left\{\begin{array}{lll} \sin\frac{\lambda x}{a} = 0, & \text{d'où} & x = i\frac{n}{\mathfrak{N}} l; \\ \operatorname{tang}\frac{\lambda x'}{a'} = -\frac{a}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a}, & \text{d'où} & x' = \frac{n'}{\mathfrak{N}}\frac{\alpha}{\pi} l' + i'\frac{n'}{\mathfrak{N}} l'; \\ \sin\frac{\lambda(l'' - x'')}{a''} = 0, & \text{d'où} & l'' - x'' = i''\frac{n''}{\mathfrak{N}} l''. \end{array}\right. \tag{49}$$

Dans ces formules, i, i', i'' désignent l'un des nombres entiers 0, 1, 2, ..., et α le plus petit arc, dont la tangente est $-\frac{nl}{n'l'}\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n}$.

On voit donc que les nœuds sont équidistants sur chacune des cordes, mais que la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre. Le nombre de ces nœuds se limite de lui-même pour chaque valeur de $\mathfrak{N}$, car on a toujours

$$x<l, \quad x'<l', \quad l''-x''<l''.$$

16. *Cas particulier où les trois parties rendraient le même son.* — Faisons dans l'équation transcendante (41) ou (48)

$$n=n'=n'',$$

elle donnera

$$\sin\frac{\lambda}{2n}\cos^2\frac{\lambda}{2n}-\frac{ll''}{l'L}\sin^3\frac{\lambda}{2n}=0,$$

d'où l'on tire

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sin\frac{\lambda}{2n}=0,\\ &\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n}=\pm\sqrt{\frac{l'L}{ll''}}.\end{aligned}\right.$$

La première de ces équations donne la série des sons

$$\mathfrak{N}=n, \quad 2n, \quad 3n, \ldots$$

que chacune des parties ferait entendre seule; il est clair en effet que ces divers sons font partie de la série des harmoniques de la corde totale. Si maintenant nous désignons par α le plus petit des arcs positifs ayant pour tangente

$$\sqrt{\frac{l'L}{ll''}},$$

nous déduirons de la seconde des équations (50) deux nouvelles séries d'harmoniques

$$\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{N}=\frac{\alpha n}{\pi}, \quad \frac{\alpha n}{\pi}+n, \quad \frac{\alpha n}{\pi}+2n, \quad \frac{\alpha n}{\pi}+3n, \ldots,\\ &\mathfrak{N}=\frac{(\pi-\alpha)n}{\pi}, \quad \frac{(\pi-\alpha)n}{\pi}+n, \quad \frac{(\pi-\alpha)n}{\pi}+2n, \ldots\end{aligned}\right.$$

en progression arithmétique.

Dans le cas plus particulier où l'on aurait en même temps

$$l'L = ll'', \tag{51}$$

c'est-à-dire où la droite L serait divisée *harmoniquement* par les points de séparation A′ et A″, on devrait poser

$$\alpha = \frac{\pi}{4};$$

par suite les deux séries deviennent

$$\frac{n}{4},\quad \frac{5n}{4},\quad \frac{9n}{4},\dots,$$
$$\frac{3n}{4},\quad \frac{7n}{4},\quad \frac{11n}{4},\dots,$$

et constituent la série unique

$$\mathfrak{N} = \frac{n}{4},\quad \frac{3n}{4},\quad \frac{5n}{4},\quad \frac{7n}{4},\dots, \tag{52}$$

dont les divers termes sont entre eux comme les nombres impairs. Ainsi, dans ce cas très-particulier, *le son fondamental de la corde à trois parties est à la double octave grave du son rendu par chacune des parties*.

On peut facilement s'arranger de manière à faire rendre le même son aux trois parties d'une corde; mais il semble assez difficile de satisfaire en même temps à la relation (51). Par conséquent il est difficile de vérifier la loi précédente par expérience.

17. *Cas particulier où $a = a' = a''$.* — Dans ce cas, qui comprend celui où A′ et A″ désigneraient les points géométriques de division d'une corde homogène, l'équation transcendante (41) donne

$$\sin\frac{\lambda L}{a} = 0,$$

d'où

$$\frac{\lambda L}{a} = i\pi,\quad \lambda = i\frac{\pi a}{L};$$

les harmoniques de la corde totale sont donc

$$\mathfrak{N} = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

18. *Cas particulier où les parties extrêmes sont très-petites.* — Dans ce cas les nombres n et n'' sont très-grands; posons

$$\frac{\pi\lambda}{2n'} = \varphi,$$

l'équation transcendante (41) deviendra

$$0 = \frac{a}{a'}\operatorname{tang}\frac{n'\varphi}{n} + \operatorname{tang}\varphi + \frac{a''}{a'}\operatorname{tang}\frac{n'\varphi}{n''} - \frac{aa''}{a'^2}\operatorname{tang}\frac{n'\varphi}{n}\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\frac{n'\varphi}{n''}.$$

Le dernier terme est du second ordre de petitesse; le premier et le troisième forment ensemble une quantité très-petite positive, donc cette équation est de la forme

$$\operatorname{tang}\varphi + \omega = 0;$$

ω tendant vers zéro quand les parties extrêmes de la corde totale tendent vers zéro, cette quantité n'est pas constante et augmente avec φ. Si elle était constante, les divers harmoniques seraient

$$\mathfrak{N} = n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 2n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 3n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \ldots .$$

En réalité on a

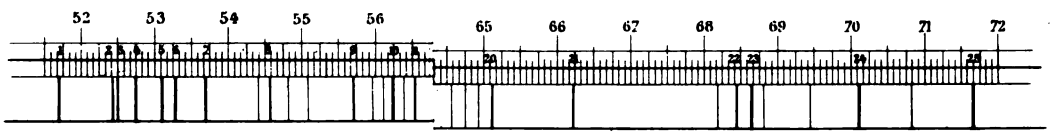
$$\mathfrak{N} = n' - \varepsilon_1, \quad 2n' - \varepsilon_2, \quad 3n' - \varepsilon_3, \ldots,$$

les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ étant croissantes et telles que

$$\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 > 3\varepsilon_1, \ldots,$$

de sorte que la perturbation apportée par la mobilité des points d'attache consiste dans le rapprochement de deux harmoniques de la corde. Cette perturbation est en sens inverse de celle que j'ai fait connaître dans le mouvement vibratoire des membranes.

Recherches sur l'onde, par M. E. Mascart.



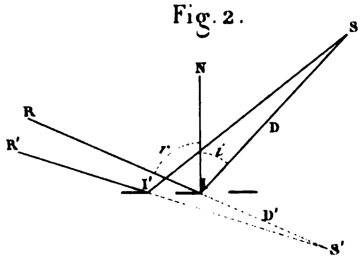


Fig. 2.

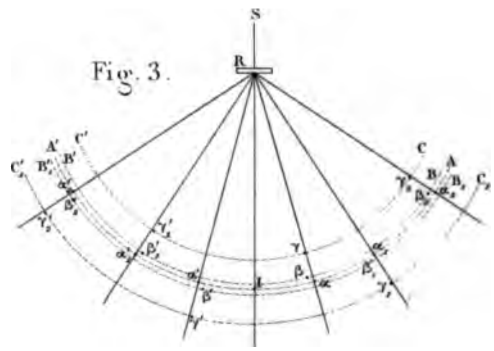


Fig. 3.

Mémoire sur le mouvement vibra ces diverses de nature, par M. J. Bourget.

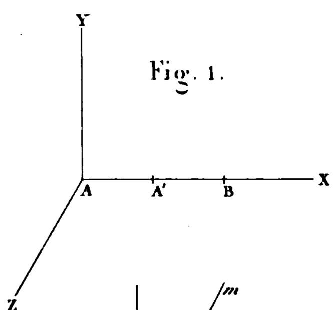


Fig. 1.

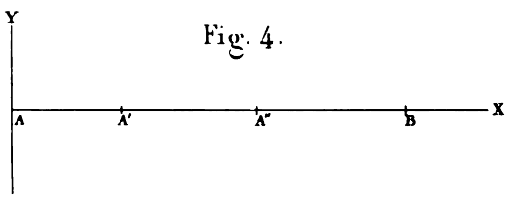
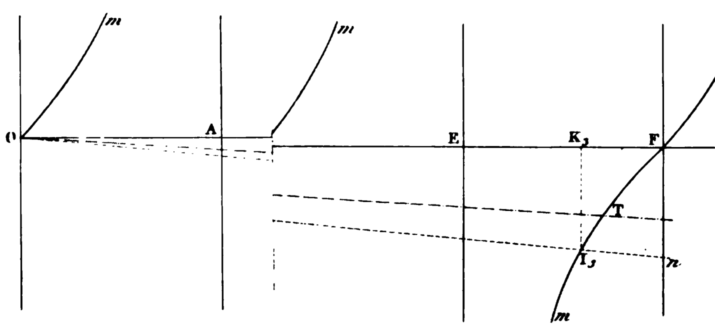


Fig. 4.



Legay imp. rue de la Bûcherie, 1, à Paris.   Dulos sc.

les harmoniques de la corde totale sont donc

$$\mathfrak{N} = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

18. *Cas particulier où les parties extrêmes sont très-petites.* — Dans ce cas les nombres n et n'' sont très-grands; posons

$$\frac{\lambda}{2n'} = \varphi,$$

l'équation transcendante (41) deviendra

$$o = \frac{a}{a'} \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n} + \operatorname{tang}\varphi + \frac{a''}{a'} \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n''} - \frac{aa''}{a'^2} \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n} \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n''}.$$

Le dernier terme est du second ordre de petitesse; le premier et le troisième forment ensemble une quantité très-petite positive, donc cette équation est de la forme

$$\operatorname{tang}\varphi + \omega = o;$$

ω tendant vers zéro quand les parties extrêmes de la corde totale tendent vers zéro, cette quantité n'est pas constante et augmente avec φ. Si elle était constante, les divers harmoniques seraient

$$\mathfrak{N} = n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 2n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 3n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \ldots.$$

En réalité on a

$$\mathfrak{N} = n' - \varepsilon_1, \quad 2n' - \varepsilon_2, \quad 3n' - \varepsilon_3, \ldots,$$

les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ étant croissantes et telles que

$$\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 > 3\varepsilon_1, \ldots,$$

de sorte que la perturbation apportée par la mobilité des points d'attache consiste dans le rapprochement de deux harmoniques de la corde. Cette perturbation est en sens inverse de celle que j'ai fait connaître dans le mouvement vibratoire des membranes.

Recherches sur l'onde; par M. E. Mascart.

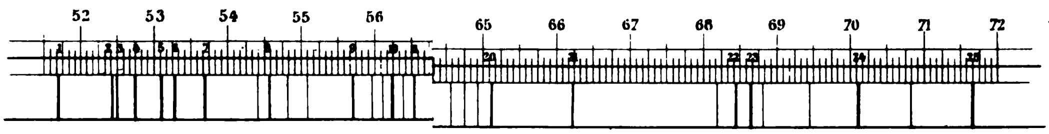
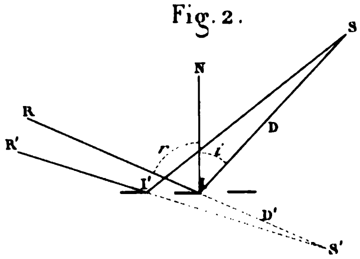
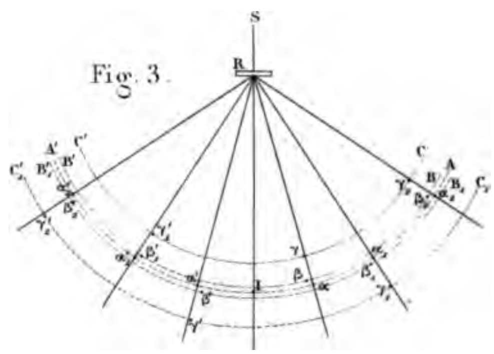


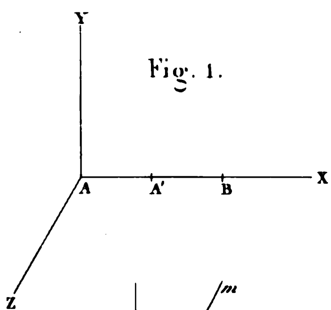
Fig. 2.

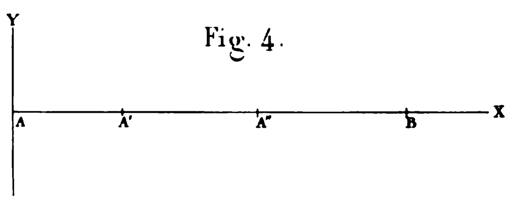


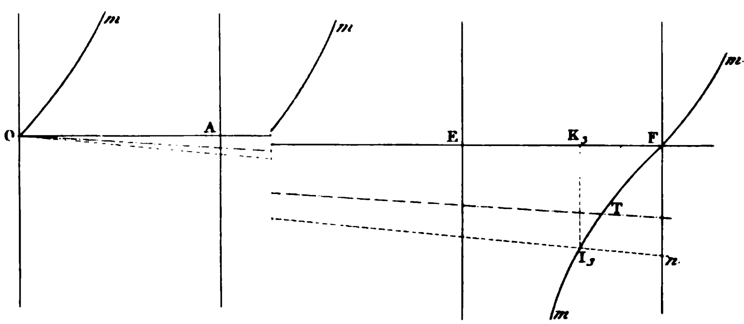


Mémoire sur le mouvement vibratoire des diverses de nature, par M. J. Bourget.

Fig. 1.







les harmoniques de la corde totale sont donc

$$\mathfrak{N} = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

18. *Cas particulier où les parties extrêmes sont très-petites.* — Dans ce cas les nombres n et n'' sont très-grands; posons

$$\frac{\lambda}{2n'} = \varphi,$$

l'équation transcendante (41) deviendra

$$0 = \frac{a}{a'} \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n} + \operatorname{tang}\varphi + \frac{a''}{a'} \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n''} - \frac{aa''}{a'^2} \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n} \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} \frac{n'\varphi}{n''}.$$

Le dernier terme est du second ordre de petitesse; le premier et le troisième forment ensemble une quantité très-petite positive, donc cette équation est de la forme

$$\operatorname{tang}\varphi + \omega = 0;$$

ω tendant vers zéro quand les parties extrêmes de la corde totale tendent vers zéro, cette quantité n'est pas constante et augmente avec φ. Si elle était constante, les divers harmoniques seraient

$$\mathfrak{N} = n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 2n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 3n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \ldots .$$

En réalité on a

$$\mathfrak{N} = n' - \varepsilon_1, \quad 2n' - \varepsilon_2, \quad 3n' - \varepsilon_3, \ldots,$$

les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ étant croissantes et telles que

$$\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 > 3\varepsilon_1, \ldots,$$

de sorte que la perturbation apportée par la mobilité des points d'attache consiste dans le rapprochement de deux harmoniques de la corde. Cette perturbation est en sens inverse de celle que j'ai fait connaître dans le mouvement vibratoire des membranes.

Recherches sur 'onde ; par M. E. Mascart.

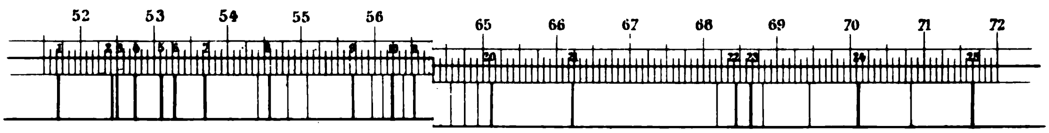


Fig. 2.

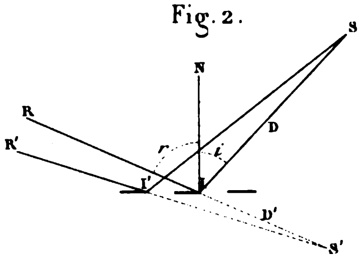
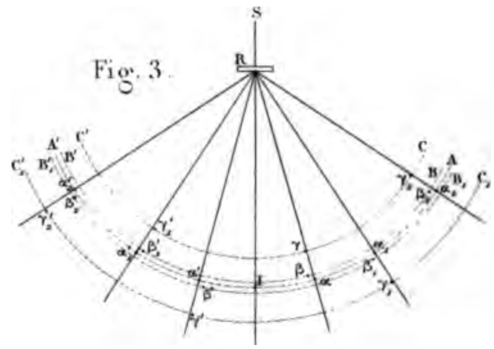


Fig. 3.



Mémoire sur le mouvement vibr ... diverses de nature ; par M. J. Bourget.

Fig. 1.

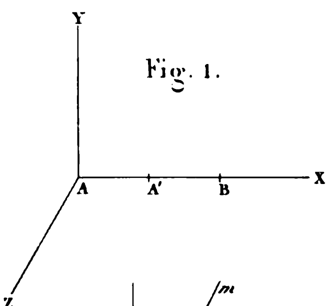
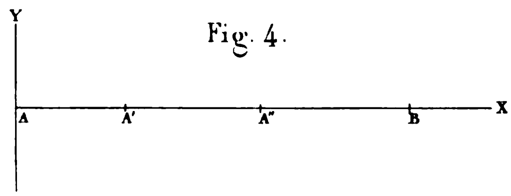
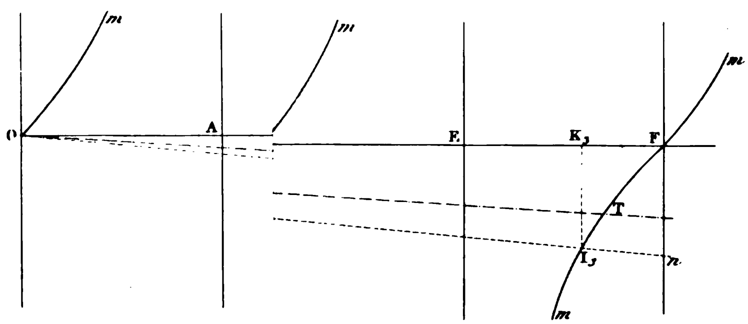


Fig. 4.





Legay imp. rue de la Bûcherie, 1, à Paris.   *Dulos sc.*

§ III. — *Mouvement vibratoire d'une corde formée d'un nombre quelconque de parties diverses de nature.*

19. *Mouvements simples.* — Par une analyse entièrement semblable à celle du paragraphe précédent, nous prouverions que le mouvement le plus général peut être regardé comme le résultat de la superposition d'une infinité de mouvements simples, donnant chacun un son unique, et déterminés chacun par l'ensemble des équations

$$(53)\quad \begin{cases} y = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u, \\ y' = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u', \\ y'' = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u'', \\ y''' = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u''', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

en même nombre que les parties de la corde. Les fonctions u, u',... sont déterminées par les équations différentielles du second ordre que voici :

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{\lambda^2}{a^2}u = 0, \\ \dfrac{d^2u'}{dx'^2} + \dfrac{\lambda^2}{a'^2}u' = 0, \\ \dfrac{d^2u''}{dx''^2} + \dfrac{\lambda^2}{a''^2}u'' = 0, \\ \dfrac{d^2u'''}{dx'''^2} + \dfrac{\lambda^2}{a'''^2}u''' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Par conséquent

$$(55)\quad \begin{cases} u = \mathrm{P}\sin\dfrac{\lambda x}{a} + \mathrm{Q}\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = \mathrm{P}'\sin\dfrac{\lambda x'}{a'} + \mathrm{Q}'\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}, \\ u'' = \mathrm{P}''\sin\dfrac{\lambda x''}{a''} + \mathrm{Q}''\cos\dfrac{\lambda x''}{a''}, \\ u''' = \mathrm{P}'''\sin\dfrac{\lambda x'''}{a'''} + \mathrm{Q}'''\cos\dfrac{\lambda x'''}{a'''}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les constantes P, Q, P', Q',... et λ se trouvent au moyen des conditions aux limites, comme nous l'avons vu précédemment. Cette détermination n'offrant aucune difficulté nouvelle, nous en supprimons le détail. La partie la plus importante c'est l'équation transcendante en λ qui fait connaître les divers sons de la corde totale. Nous allons apprendre à la former.

Pour éviter des écritures trop longues, il est bon d'employer le système des notations abrégées que voici :

$$(56)\qquad \begin{cases} S = \sin\dfrac{\lambda l}{a}, & C = \cos\dfrac{\lambda l}{a}, & T = \operatorname{tang}\dfrac{\lambda l}{a}, \\ S' = \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, & C' = \cos\dfrac{\lambda l'}{a'}, & T' = \operatorname{tang}\dfrac{\lambda l'}{a'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

20. *Équation transcendante qui donne les divers harmoniques de la corde totale.* — Cette équation devient de plus en plus compliquée à mesure que le nombre des parties de la corde augmente; voici cependant une règle très-simple pour la former dans tous les cas.

Posons

$$(57)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = T + T' + T'' + \ldots, & \text{somme des produits un à un,} \\ \sigma_2 = TT' + TT'' + T'T'' + \ldots, & \text{somme des produits deux à deux,} \\ \sigma_3 = TT'T'' + TT'T''' + \ldots, & \text{somme des produits trois à trois.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous savons que

$$(58)\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\lambda l}{a} + \frac{\lambda l'}{a'} + \frac{\lambda l''}{a''} + \ldots\right) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \ldots}{1 - \sigma_2 + \sigma_4 - \ldots}.$$

Pour écrire l'équation transcendante qui fait connaître λ :

1° On prend le numérateur de la fraction (58)

$$\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \ldots.$$

2° On multiplie chacun des termes de σ_1 par la lettre a affectée de l'accent qui correspond à ce terme.

3° On multiplie chacun des termes de σ_3 par $\frac{a^i a^j}{a^p}$, l'accent i correspondant à la première tangente, l'accent j à la troisième, l'accent p à la seconde, ces tangentes étant rangées par ordre d'accentuation.

4° On multiplie chacun des termes de σ_3 par $\frac{a^i a^j a^k}{a^p a^q}$, les accents i, j, k correspondant respectivement à la première, à la troisième, à la cinquième tangente, les accents p et q correspondant à la seconde et à la quatrième. La loi est évidente, et on la continue pour σ_7, σ_9.

5° On égale à zéro le numérateur de la fraction (58) ainsi modifié, et on a l'équation transcendante demandée.

EXEMPLES.

1° *Cas de deux parties.* — Le numérateur de la fraction (58) se réduit à

$$\sigma_1 = \mathrm{T} + \mathrm{T}'.$$

Modifions-le suivant la règle indiquée, et nous trouvons l'équation transcendante du § I^{er} :

$$a\mathrm{T} + a'\mathrm{T}' = 0.$$

2° *Cas de trois parties.* — Le numérateur de la fraction (58) devient

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' - \mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}''.$$

Modifions-le suivant la règle, et nous retrouvons l'équation transcendante du § II de notre Mémoire

$$a\mathrm{T} + a'\mathrm{T}' + a''\mathrm{T}'' - \frac{aa''}{a'}\mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}'' = 0.$$

3° *Cas de quatre parties.* — Le numérateur de la fraction (58) devient

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \mathrm{T}''' - \mathrm{T}'\mathrm{T}''\mathrm{T}''' - \mathrm{T}\mathrm{T}''\mathrm{T}''' - \mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}''' - \mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}''.$$

En le modifiant suivant la règle ci-dessus, nous obtenons l'équation

transcendante en λ

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &aT + a'T' + a''T'' + a'''T''' - \frac{a'a'''}{a''}T'T''T''' - \frac{aa'''}{a''}TT''T''' \\ &\qquad - \frac{aa'''}{a'}TT'T''' - \frac{aa''}{a'}TT'T'' = 0. \end{aligned}\right.$$

4° *Cas de cinq parties.* — Le numérateur de la fraction (58) devient

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 = T + T' + T'' + T''' + T^{\text{iv}} &- T'T''T''' - TT''T''' \\ &- TT'T''' - TT'T'' - TT'T^{\text{iv}} - TT''T^{\text{iv}} - TT'''T^{\text{iv}} \\ &- T'T''T^{\text{iv}} - T'T'''T^{\text{iv}} - T''T'''T^{\text{iv}} + TT'T''T'''T^{\text{iv}}. \end{aligned}$$

Modifions-le suivant la règle ci-dessus, et nous aurons pour l'équation transcendante en λ

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} &aT + a'T' + a''T'' + a'''T''' + a^{\text{iv}}T^{\text{iv}} - \frac{a'a'''}{a''}T'T''T''' \\ &- \frac{aa'''}{a''}TT''T''' - \frac{aa'''}{a'}TT'T''' - \frac{aa''}{a'}TT'T'' - \frac{aa^{\text{iv}}}{a'}TT'T^{\text{iv}} \\ &- \frac{aa^{\text{iv}}}{a''}TT''T^{\text{iv}} - \frac{aa^{\text{iv}}}{a'''}TT'''T^{\text{iv}} - \frac{a'a^{\text{iv}}}{a''}T'T''T^{\text{iv}} \\ &- \frac{a'a^{\text{iv}}}{a'''}T'T'''T^{\text{iv}} - \frac{a''a^{\text{iv}}}{a'''}T''T'''T^{\text{iv}} + \frac{aa''a^{\text{iv}}}{a'a'''}TT'T''T'''T^{\text{iv}} = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on continuerait de même.

On voit, par la complication des équations (59) et (60), que les calculs numériques relatifs aux cas de plus de trois parties sont, sinon impossibles, du moins rebutants par leur longueur. Mais au point de vue physique il suffit de constater l'accord entre l'expérience et la théorie pour les cas les plus simples.

La démonstration de la généralité de notre règle est facile; on en trouve d'ailleurs une vérification en ceci que l'on doit avoir

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda(l + l' + l'' \ldots)}{a} = \operatorname{tang}\left(\frac{\lambda l}{a} + \frac{\lambda l'}{a} + \frac{\lambda l''}{a} + \ldots\right) = 0,$$

quand on suppose

$$a = a' = a'', \ldots,$$

hypothèse qui comprend le cas où l, l', l'', ... ne sont plus que les diverses parties d'une corde homogène.

§ IV. — *Vérification expérimentale.*

21. La théorie de l'élasticité n'est pas encore arrivée à l'état de la mécanique céleste; ses équations fondamentales ne reposent pas sur un principe unique vérifié par de si nombreuses observations, qu'il n'y ait plus à douter de son exactitude absolue. Dans chacun des problèmes qu'elle traite il s'introduit non-seulement les hypothèses fondamentales qui conduisent aux équations différentielles des phénomènes étudiés, mais encore des conditions aux limites simples et idéales dont le physicien peut approcher, mais qu'il ne peut jamais complétement réaliser; enfin le calculateur fait abstraction des forces perturbatrices qu'il croit petites, et qui compliqueraient ses équations. Il y a donc toujours un intérêt très-grand à comparer les résultats de la théorie avec ceux de l'expérience; et c'est le seul moyen de justifier toutes les hypothèses faites dans le cours de l'analyse. Ainsi, en particulier, nous avons admis au début de notre Mémoire que les deux parties de la corde ont une tangente commune au point de jonction pendant tout le mouvement; toute notre théorie est fondée sur cette hypothèse : c'est la vérification expérimentale des lois trouvées qui en montrera la légitimité.

Mes études n'ont porté que sur des cordes formées de deux ou trois parties. Les calculs numériques auxquels chaque expérience entraîne pour le cas de trois sont déjà très-considérables, à cause de la complication de l'équation transcendante à résoudre.

22. *Procédés d'expérience.* — Il est nécessaire de déterminer avec précision le nombre de vibrations d'une corde tendue et sa longueur; ce sont les seuls éléments qui entrent dans le calcul, comme on le voit au § VI du Mémoire. Grâce aux libéralités de l'Association Scientifique, j'ai pu faire usage d'un sonomètre construit par M. König et disposé de façon à fournir rapidement ces deux quantités.

Ce sonomètre porte, l'une à côté de l'autre, la corde d'expérience formée de deux ou trois parties et une corde *normale* de comparaison dont je vais indiquer l'usage. A l'une des extrémités de la table du so-

nomètre se trouve fixé un diapason étalon donnant l'*ut* de 256 vibrations simples ou 128 vibrations doubles.

On peut facilement mettre la corde normale à l'unisson du diapason. On le fait à peu près à l'oreille au moyen d'une vis à petit pas qui tend la corde lentement quand elle est presque arrivée à l'accord. Les battements qui se produisent indiquent par leur plus ou moins de fréquence dans quel sens il faut tourner pour atteindre l'accord parfait. On reconnaît qu'on y est arrivé lorsque la corde se met en vibration spontanément aussitôt que le diapason vibre lui-même. Dans cet état la corde fait 128 vibrations complètes par secondes, et sa longueur est de 1000 millimètres. En la raccourcissant au moyen d'un curseur mobile on trouvera la longueur b à l'unisson de l'une des parties de la corde en expérience; une simple proportion donnera le nombre des vibrations n :

$$\frac{n}{128} = \frac{1000}{b},$$

d'où

$$n = \frac{128000}{b}.$$

On voit que ce procédé exige que l'on mette à l'accord d'unisson deux cordes voisines. Les battements rendent cette opération facile; d'ailleurs on a toujours une vérification en cherchant si le mouvement de l'une entraîne le mouvement spontané de l'autre.

Un moyen connu, très-simple, m'a servi à trouver les divers harmoniques des cordes expérimentées; j'entends par là les sons successifs qu'elle peut donner au-dessus du son fondamental, en se divisant en un certain nombre de parties. Si l'on promène légèrement l'archet sur la corde en la touchant du doigt en divers points, on arrive à trouver par tâtonnements les nœuds, et alors la corde vibre sous l'archet sans difficulté, en donnant un des harmoniques. On trouve la position exacte des nœuds, soit au moyen de petits chevalets de fil léger qui s'arrêtent en ces points, soit au moyen de curseurs qui, placés aux nœuds, divisent la corde expérimentée en parties donnant chacune l'harmonique qu'on vient de trouver.

Pour avoir une corde composée de plusieurs parties hétérogènes on peut employer plusieurs moyens : 1° relier par des nœuds des cordes

différentes; 2° étirer et amincir à la filière une partie d'un fil plus gros; 3° souder deux fils de métaux différents et passer le tout à la filière. Le premier procédé, de beaucoup le plus commode, est un peu grossier; mais les perturbations que le nœud produit sont à peine sensibles, comme on le voit dans mes tableaux d'expérience, et il est le seul qu'on puisse employer si l'on opère sur des cordes à boyau.

23. *Notations.* — J'appellerai :

l, l' les longueurs des diverses parties;

L la longueur totale;

n, n' les nombres de vibrations doubles des sons fondamentaux des parties l, l';

$\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ les nombres de vibrations doubles du son fondamental et des harmoniques de la corde totale : ces lettres $\mathfrak{N}^{(t)}$, $\mathfrak{N}^{(o)}$, affectées des indices t et o, indiqueront les sons théoriques et les sons observés;

z la distance au zéro des divers nœuds;

b, b' les longueurs de corde normale à l'unisson de l, l', ...;

B_1, B_2 les longueurs de corde normale à l'unisson de L et de ses harmoniques.

Toutes les longueurs seront exprimées en millimètres.

24. *Tableau des résultats donnés par l'expérience.*

Première expérience.

Les deux cordes liées par un nœud sont l'une d'acier l, l'autre à boyau l'.

$l = 420$	$b = 544$	$n = 235$	$B^{(o)} = 1335$
$l' = 580$	$b' = 767$	$n' = 167$	$\mathfrak{N}^{(o)} = 96$

Équation transcendante à résoudre :

$$\tang x + 0,912 \tang 1,410\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = \frac{\lambda}{2n} = 1,294, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{\pi} = \mathfrak{N}^{(t)} = 96,8.$$

Deuxième expérience.

Mêmes cordes. Tension différente.

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 535 & n = 240 & B^{(o)} = 1312 \\ l' = 580 & b' = 753 & n' = 170 & \mathfrak{N}^{(o)} = 99,6 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\tang x + 0,980 \tang 1,410\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = 1,303, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{N}^{(1)} = 99,7.$$

Troisième expérience.

Mêmes cordes. Tension différente.

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 565 & n = 227 & B^{(o)} = 1396 \\ l' = 580 & b' = 809 & n' = 158 & \mathfrak{N}^{(o)} = 91,8 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\tang x + 0,968 \tang 1,432\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = \frac{\lambda}{2n} = 1,288, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{\pi} = \mathfrak{N}^{(1)} = 93,2.$$

Quatrième expérience.

Mêmes cordes. Tension différente.

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 574 & n = 223 & B^{(o)} = 1414 \\ l' = 580 & b' = 813,5 & n' = 157 & \mathfrak{N}^{(o)} = 90,6 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\tang x + 0,979 \tang 1,416\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = \frac{\lambda}{2n} = 1,298, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{\pi} = \mathfrak{N}^{(1)} = 92,2.$$

Remarque. — Ces quatre expériences faites dans des conditions voisines sur deux parties bien différentes de cordes réunies par un nœud montrent un accord presque parfait avec la théorie. Il faut en conclure que le mode grossier de liaison n'a pas d'influence sensible.

Cinquième expérience.

La corde à boyau des expériences précédentes est raccourcie au moyen d'un curseur jusqu'à ce qu'elle donne le même son que la corde d'acier; alors

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 565 & n = 227 & B^{(0)} = 1139 \\ l' = 408 & & & \mathfrak{N}^{(0)} = 112 \end{array}$$

La corde totale L doit donner, d'après la théorie, l'octave grave du son de chacune des parties, savoir

$$\mathfrak{N}^{(1)} = 113,5.$$

J'ai multiplié les vérifications de la loi démontrée par cette expérience; j'ai toujours trouvé un accord presque parfait avec la théorie. Cette vérification, n'exigeant pas la résolution d'une équation transcendante, peut être faite très-facilement dans des conditions très-diverses.

Sixième expérience.

Les deux parties reliées par un nœud sont l'une l d'acier, l'autre l' de laiton.

$$\begin{array}{llll} \text{Acier}\ldots & l = 445 & b = 412 & n = 311 \\ \text{Laiton}\ldots & l' = 555 & b' = 906 & n' = 142 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,567 \operatorname{tang} 2,20\, x = 0.$$

Racines successives et sons correspondants :

$x_1 = 0{,}904$	$\mathcal{N}_1^{(t)} = 89{,}5$	
$x_2 = 2{,}021$	$\mathcal{N}_2^{(t)} = 200$	1 nœud ;
$x_3 = 2{,}982$	$\mathcal{N}_3^{(t)} = 295$	2 nœuds ;
$x_4 = 3{,}840$	$\mathcal{N}_4^{(t)} = 380$	3 nœuds ;
$x_5 = 4{,}939$	$\mathcal{N}_5^{(t)} = 489$	4 nœuds ;
$x_6 = 5{,}957$	$\mathcal{N}_6^{(t)} = 590$	5 nœuds.

Position théorique des nœuds :

1 nœud.	2 nœuds.	3 nœuds.	4 nœuds.	5 nœuds.
$z = 607{,}4$	$z_1 = 468$	$z_1 = 364$	$z_1 = 283$	$z_1 = 235$
	$z_2 = 734$	$z_2 = 587$	$z_2 = 518{,}5$	$z_2 = 456$
		$z_3 = 794$	$z_3 = 679$	$z_3 = 592$
			$z_4 = 839{,}5$	$z_4 = 728$
				$z_5 = 864$

L'expérience a donné :

$\mathcal{N}_1^{(o)} = 86{,}2$	$\mathcal{N}_3^{(o)} = 293$	$\mathcal{N}_5^{(o)} = 487$
$\mathcal{N}_2^{(o)} = 193$	$\mathcal{N}_4^{(o)} = 380$	$\mathcal{N}_6^{(o)} = 591$

Les nœuds sont sensiblement à leur place. Je l'ai constaté en marquant à l'encre les points théoriques, en y plaçant de petits chevalets de fil et en faisant vibrer à côté la corde normale, de manière à rendre l'harmonique correspondant. Les chevalets restaient immobiles aux nœuds marqués, et remuaient dans les positions intermédiaires.

Remarque I. — Les deux premiers sons rendus par la corde paraissent différer des sons théoriques plus que les autres ; mais on peut attribuer cette divergence à des erreurs d'expérience. La détermination des sons graves par le procédé que j'ai suivi présente toujours quelque incertitude.

Remarque II. — J'ai vu dans cette expérience que le nœud qui réunit les deux parties apporte des perturbations notables quand la corde sur laquelle il se trouve est très-petite. Dans le cas, par exemple, où la corde présente 5 nœuds de vibration, si l'on place 4 curseurs mobiles

aux points marqués, les diverses parties de la corde doivent toutes rendre le même son $\mathcal{N}_6$. Or on observe que la portion assez courte qui contient le point de jonction des deux parties vibre difficilement et rend un son un peu plus bas.

Septième expérience.

La corde est en laiton, d'une seule pièce, amincie à la filière dans l'une de ses parties. Le nœud de jonction ne peut plus avoir d'influence. La partie l la plus longue est la plus fine.

$l = 642$	$b = 947$	$n = 135$
$l' = 358$	$b' = 582$	$n' = 220$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0{,}906 \operatorname{tang} 0{,}615\, x = 0.$$

Racines successives et sons théoriques correspondants :

$x_1 = 1{,}966$	$\mathcal{N}_1^{(l)} = 84{,}5$	
$x_2 = 3{,}860$	$\mathcal{N}_2^{(l)} = 165{,}5$	1 nœud;
$x_3 = 5{,}859$	$\mathcal{N}_3^{(l)} = 252$	2 nœuds;
$x_4 = 9{,}710$	$\mathcal{N}_5^{(l)} = 417$	4 nœuds.

Position théorique des nœuds :

1 nœud.	2 nœuds.	4 nœuds.
$z = 526$	$z_1 = 344$	$z_1 = 208$
	$z_2 = 687$	$z_2 = 416$
		$z_3 = 624$
		$z_4 = 812$

L'expérience donne :

	1 nœud.	2 nœuds.	4 nœuds.
$\mathcal{N}_1^{(o)} = 83$			
$\mathcal{N}_2^{(o)} = 167$	$z = 520$	$z_1 = 346$	$z_1 = 209$
$\mathcal{N}_3^{(o)} = 251$		$z_2 = 686$	$z_2 = 418$
$\mathcal{N}_5^{(o)} = 415$			$z_3 = 627$
			$z_4 = 810$

Les différences avec la théorie paraissent insignifiantes.

Remarque. — Les sons successifs forment à peu près la série 1, 2, 3, 4, 5,.... On peut s'en rendre compte théoriquement. Nous avons vu que si l'on a

$$a = a' \quad \text{ou} \quad nl = n'l',$$

la corde hétérogène se comporte comme une corde homogène. Or cette condition est ici sensiblement remplie, car

$$\frac{l}{l'} = 1,79 \quad \text{et} \quad \frac{n'}{n} = 1,63.$$

Huitième expérience.

La corde précédente est remplacée par une autre plus fine, d'une seule pièce et amincie à la filière dans l'une de ses parties. La plus fine l est la plus courte :

$$\begin{array}{lll} l = 332 & b = 479 & n = 267 \\ l' = 668 & b' = 1502 & n' = 85,2 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\tang x + 0,642 \tang 3,131\, x = 0.$$

Racines successives et sons théoriques correspondants :

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 0,708 & \mathfrak{N}_1^{(t)} = 60 & & & & \\ x_2 = 1,516 & \mathfrak{N}_2^{(t)} = 129 & 1 \text{ nœud..} & z = 558 & & \\ x_3 = 2,333 & \mathfrak{N}_3^{(t)} = 198,5 & 2 \text{ nœuds.} & z_1 = 426 & z_2 = 713 & \\ x_4 = 3,054 & \mathfrak{N}_4^{(t)} = 259 & 3 \text{ nœuds.} & z_1 = 340 & z_2 = 560 & z_3 = 780 \end{array}$$

Résultats de l'expérience :

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{N}_1^{(o)} = 64 & & & & \\ \mathfrak{N}_2^{(o)} = 130 & 1 \text{ nœud..} & z = 558 & & \\ \mathfrak{N}_3^{(o)} = 197 & 2 \text{ nœuds.} & z_1 = 427 & z_2 = 713 & \\ \mathfrak{N}_4^{(o)} = 260 & 3 \text{ nœuds.} & z_1 = 340 & z_2 = 561 & z_3 = 782 \end{array}$$

Les différences sont sans importance.

Neuvième expérience.

La corde totale est formée de trois parties de laiton de divers diamètres :

$l = 357$	$b = 564$	$n = 227$
$l' = 321$	$b' = 472$	$n' = 271$
$l'' = 322$	$b'' = 705$	$n'' = 182$

En posant toujours

$$x = \frac{\lambda}{2n},$$

l'équation (48) du Mémoire, réduite en nombre, devient

$$\begin{aligned} 0 = {} & \operatorname{tang} x + 1{,}074 \operatorname{tang} 0{,}838x + 0{,}722 \operatorname{tang} 1{,}250x \\ & - 0{,}671 \operatorname{tang} x \operatorname{tang} 0{,}838x \operatorname{tang} 1{,}250x. \end{aligned}$$

Racines successives et sons théoriques correspondants :

$x_1 = 1{,}063$	$\mathfrak{N}_1^{(t)} = 77$				
$x_2 = 1{,}967$	$\mathfrak{N}_2^{(t)} = 142{,}5$	1 nœud..	$z = 580$		
$x_3 = 3{,}113$	$\mathfrak{N}_3^{(t)} = 225$	2 nœuds.	$z_1 = 360{,}3$	$z_2 = 740{,}3$	
$x_4 = 4{,}035$	$\mathfrak{N}_4^{(t)} = 291{,}6$	3 nœuds.	$z_1 = 277{,}9$	$z_2 = 573{,}8$	$z_3 = 799{,}4$

Résultats de l'expérience :

$\mathfrak{N}_1^{(t)} = 74$				
$\mathfrak{N}_2^{(t)} = 141$	1 nœud..	$z = 575$		
$\mathfrak{N}_3^{(t)} = 225$	2 nœuds.	$z_1 = 360$	$z_2 = 740$	
$\mathfrak{N}_4^{(t)} = 290$	3 nœuds.	$z_1 = 278$	$z_2 = 574$	$z_3 = 798$

Remarque. — Les sons successifs forment à peu près la série 1, 2, 3, ...; cela tient à ce que les produits nl, $n'l'$, $n''l''$ sont à peu près égaux. Dans ce cas en effet la corde hétérogène se comporte à peu près comme une corde homogène d'après la théorie.

Dixième expérience.

Au moyen de curseurs mobiles les deux cordes extrêmes de l'expérience précédente sont diminuées de longueur, de façon que les trois parties rendent le même son.

$$l = 289 \qquad b = 485 \qquad n = 264$$
$$l' = 321$$
$$l'' = 213$$
$$L = 823$$

La formule (50) du Mémoire donne dans ce cas

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n} = \operatorname{tang}\alpha = \pm\sqrt{\frac{l' L}{l l''}};$$

de là on déduit

$$\alpha = 1{,}121, \quad \pi - \alpha = \alpha' = 2{,}021.$$

Série des harmoniques théoriques :

$$\mathfrak{N}_1^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} = 90 \qquad \mathfrak{N}_6^{(t)} = 2n = 528$$
$$\mathfrak{N}_2^{(t)} = \frac{\alpha' n}{\pi} = 169{,}5 \qquad \mathfrak{N}_7^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} + 2n = 622$$
$$\mathfrak{N}_3^{(t)} = n = 264 \qquad \mathfrak{N}_8^{(t)} = \frac{\alpha' n}{\pi} + 2n = 697{,}5$$
$$\mathfrak{N}_4^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} + n = 358 \qquad \mathfrak{N}_9^{(t)} = 3n = 792$$
$$\mathfrak{N}_5^{(t)} = \frac{\alpha' n}{\pi} + n = 433{,}5 \qquad \mathfrak{N}_{10}^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} + 3n = 886$$

Résultats de l'expérience :

$$\mathfrak{N}_1^{(o)} = 90 \qquad \mathfrak{N}_6^{(o)} = 530$$
$$\mathfrak{N}_2^{(o)} = 169 \qquad \mathfrak{N}_7^{(o)} = 620$$
$$\mathfrak{N}_3^{(o)} = 264 \qquad \mathfrak{N}_8^{(o)} = 692$$
$$\mathfrak{N}_4^{(o)} = 360 \qquad \mathfrak{N}_9^{(o)} = 795$$
$$\mathfrak{N}_5^{(o)} = 434 \qquad \mathfrak{N}_{10}^{(o)} = 890$$

L'accord est aussi parfait que possible.

25. *Conclusion.* — Les expériences diverses que nous venons de résumer montrent que les lois relatives aux cordes hétérogènes se vérifient aussi parfaitement que celles qui se rapportent aux cordes homogènes. Nous devons par conséquent regarder comme parfaitement exacte notre hypothèse fondamentale sur le raccordement des diverses parties pendant tout le mouvement.

NOTE

SUR UNE

CLASSE DE COURBES DU QUATRIÈME ORDRE

ET SUR

L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. G. DARBOUX,

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Dans un article inséré au tome II de ce Recueil, j'ai avancé que l'on pouvait déduire de l'étude d'une classe remarquable de courbes une démonstration géométrique nouvelle du théorème d'Euler relatif à l'addition des fonctions elliptiques. Je me propose, dans cette Note, de développer cette démonstration, et d'y ajouter une démonstration analytique que je crois nouvelle aussi; j'établirai en même temps un théorème relatif aux courbes étudiées. Ce théorème est la généralisation du théorème de M. Dupin sur les coniques focales, et est aussi énoncé dans mon précédent travail.

I.

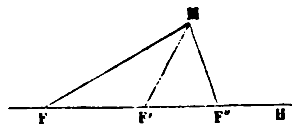
Les courbes que nous allons étudier sont les courbes du quatrième degré ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle. Nous les appellerons, avec M. Moutard, *anallagmatiques*. Cette classe de courbes, qui jouissent de belles propriétés, comprend, en particulier, les ovales de Descartes, dont l'équation en coordonnées bipolaires est

$$nr + r' = h.$$

M. Chasles a montré (voir *Aperçu historique*) que ces courbes ont un troisième foyer F″ situé sur la ligne qui joint les deux premiers F, F′ (*fig.* 1). Déterminons ce troisième foyer : soient

$$FF' = c, \quad F'F'' = x.$$

Fig. 1.



On a, d'après un théorème peu connu de Géométrie, la relation suivante entre les trois lignes MF, MF′, MF″ :

$$\overline{MF}^2 . F'F'' + \overline{MF''}^2 FF' - \overline{MF'}^2 FF'' = \overline{FF'} . \overline{FF''} . \overline{F'F''}$$

ou bien

$$xr^2 + cr''^2 - (c+x)r'^2 = cx(c+x).$$

Si on remplace r' par sa valeur en fonction de r déduite de l'équation des ovales, r''^2 sera égal à une fonction du second degré en r. Exprimons que ce polynôme est un carré parfait, et nous aurons

$$c^2 n^2 - h^2 + cx(n^2 - 1) = 0,$$

équation qui détermine x, et, en extrayant la racine carrée,

$$cr'' = hr - \frac{n(h^2 - c^2)}{n^2 - 1}.$$

Nous allons prouver maintenant que toutes les ovales de Descartes ayant les trois mêmes foyers forment un système double orthogonal, c'est-à-dire que par chaque point du plan il passe deux ovales se coupant à angle droit.

Pour toutes nos ovales c et x doivent rester les mêmes, et, par suite, si l'on pose

$$c + x = \frac{c}{k^2}, \quad h = \sqrt{1 - \alpha^2},$$

on aura, d'après l'équation de condition,

$$n = \sqrt{1 - k^2\alpha^2}.$$

L'équation générale de nos ovales sera donc

$$(1)\qquad r\sqrt{1-k^2\alpha^2}+r'=c\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Ou bien, en désignant par r'' la distance au troisième foyer,

$$(2)\qquad r\sqrt{1-\alpha^2}-r''=\frac{c}{k^2}\sqrt{1-\alpha^2k^2}.$$

Lorsque α varie, on a un système de courbes dont nous allons chercher l'équation différentielle.

Pour cela, différentions les équations (1) et (2); nous trouverons

$$dr\sqrt{1-\alpha^2k^2}+dr'=0,$$
$$dr\sqrt{1-\alpha^2}\quad -dr''=0.$$

Au moyen de ces équations nous éliminerons α sans difficulté, et notre équation différentielle sera

$$r'dr-rdr'=cdr''.$$

Prenons pour axes l'axe des ovales et la perpendiculaire au point F, nous aurons

$$r^2=x^2+y^2,$$
$$r'^2=(x-c)^2+y^2,$$
$$r''^2=\left(x-\frac{c}{k^2}\right)^2+y^2.$$

Au lieu des variables x, y prenons les variables

$$u=x+yi,$$
$$v=x-yi,$$

les expressions de r^2, r'^2, r''^2 deviendront

$$r^2=uv,\quad r'^2=(u-c)(v-c),\quad r''^2=\left(u-\frac{c}{k^2}\right)\left(v-\frac{c}{k^2}\right).$$

Substituons ces valeurs dans l'équation différentielle, et élevons au carré pour faire disparaître les radicaux, nous trouvons

$$(3)\qquad \frac{du^2}{u(u-c)\left(u-\frac{c}{k^2}\right)}=\frac{dv^2}{v(v-c)\left(v-\frac{c}{k^2}\right)}.$$

11.

Cette équation différentielle, convenablement interprétée, donne un moyen géométrique simple de mener la tangente aux ovales, quand on connaît les trois foyers. On a, en effet,

$$\frac{du}{dv} = \frac{dx + i\,dy}{dx - i\,dy} = e^{2i\mathrm{V}},$$

V désignant l'angle que fait la tangente avec l'axe des x. De même

$$\frac{u}{v} = e^{2i\widehat{\mathrm{MFH}}}, \quad \frac{u-c}{v-c} = e^{2i\widehat{\mathrm{MF'H}}},$$

$$\frac{u - \frac{c}{k^2}}{v - \frac{c}{k^2}} = e^{2i\widehat{\mathrm{MF''H}}}.$$

Notre équation différentielle peut donc s'écrire

$$e^{4i\mathrm{V}} = e^{2i(\widehat{\mathrm{MFH}} + \widehat{\mathrm{MF'H}} + \widehat{\mathrm{MF''H}})},$$

$$\mathrm{V} = \frac{\widehat{\mathrm{MFH}} + \widehat{\mathrm{MF'H}} + \widehat{\mathrm{MF''H}}}{2} + k\frac{\pi}{2},$$

formule qui donne pour l'angle V deux valeurs distinctes différant de $\frac{\pi}{2}$, et par suite deux directions rectangulaires. L'angle V se construira sans difficulté.

Il résulte de ce qui précède que l'une quelconque des deux équations

$$\sqrt{1 - \alpha^2 k^2}\sqrt{uv} + \sqrt{(u-c)(v-c)} = c\sqrt{1-\alpha^2},$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{uv} - \sqrt{\left(u - \frac{c}{k^2}\right)\left(v - \frac{c}{k^2}\right)} = \frac{c}{k^2}\sqrt{1-\alpha^2 k^2}$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt{u(u-c)\left(u - \frac{c}{k^2}\right)}} = \frac{dv}{\sqrt{v(v-c)\left(v - \frac{c}{k^2}\right)}}.$$

Posons

$$u = cx^2, \quad v = cy^2,$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

et son intégrale générale sera donnée par l'une des deux équations

$$\sqrt{1-\alpha^2k^2}\,xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \sqrt{1-\alpha^2},$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}\,xy - \frac{1}{k^2}\sqrt{(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)} = \frac{1}{k^2}\sqrt{1-\alpha^2k^2}.$$

C'est le théorème d'Euler. On voit que si l'on pose

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-c)\left(u-\frac{c}{k^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\alpha+\beta i}{\sqrt{c}},$$

on aura

$$u = c\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta i) = x + yi,$$

d'où

$$x = \frac{c}{2}\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta i) + \frac{c}{2}\sin^2\mathrm{am}(\alpha-\beta i),$$

$$y = \frac{c}{2i}\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta i) - \frac{c}{2i}\sin^2\mathrm{am}(\alpha-\beta i).$$

Si on laisse β constant, et qu'on fasse varier α, on aura toutes les courbes d'un système. Si, au contraire, on fait varier β, on aura les courbes orthogonales aux premières.

II.

Voici une démonstration analytique du même théorème.

Soit l'équation

$$(4)\qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} = \Delta u.$$

On en déduit par la différentiation

$$(5)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -(1+k^2)u + 2k^2u^3.$$

Supposons que l'on ait trouvé deux intégrales particulières de l'équation du premier ordre, et par suite de celle du second ordre. Cherchons si ces deux intégrales ne seraient pas liées par une relation finie, comme dans le cas de l'équation linéaire du second ordre. Soit u' la seconde intégrale particulière, on aura

$$u'\frac{d^2u}{dt^2} - u\frac{d^2u'}{dt^2} = 2k^2uu'(u^2 - u'^2).$$

Des deux équations du premier ordre on déduit

$$u'^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u^2\left(\frac{du'}{dt}\right)^2 = (u'^2 - u^2)(1 - k^2u^2u'^2).$$

On a donc, en remplaçant $u'^2 - u^2$ dans l'équation précédente par sa valeur tirée de cette dernière relation,

$$(6)\qquad \frac{u'\dfrac{d^2u}{dt^2} - u\dfrac{d^2u'}{dt^2}}{u'\dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du'}{dt}} = -\frac{2k^2uu'\left(u'\dfrac{du}{dt} + u\dfrac{du'}{dt}\right)}{1 - k^2u^2u'^2}.$$

Intégrons les deux membres, nous trouverons

$$\mathrm{L}\left(u'\frac{du}{dt} - u\frac{du'}{dt}\right) = \mathrm{L}c(1 - k^2u^2u'^2),$$

$$(7)\qquad \frac{u'\dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du'}{dt}}{1 - k^2u^2u'^2} = c = \frac{u'\Delta u - u\Delta u'}{1 - k^2u^2u'^2}.$$

On peut interpréter cette équation de deux manières.

On a d'abord

$$\frac{du}{\Delta u} = \frac{du'}{\Delta u'} = dt,$$

donc l'équation (7) donne l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{du}{\Delta u} = \frac{du'}{\Delta u'}.$$

Autrement, si l'on considère u comme une fonction de t,

$$u = \varphi(t),$$

u' ne peut être que $\varphi(t+a)$; on a donc

$$(8) \qquad \frac{\varphi(t+a)\Delta\varphi(t)-\varphi(t)\Delta\varphi(t+a)}{1-k^2\varphi^2(t)\varphi^2(t+a)}=c=\varphi(a).$$

C'est la formule dont dépend l'addition des fonctions elliptiques.

Le succès de notre méthode est fondé sur ce fait que dans l'équation (6) le coefficient de la dérivée de uu' est une fonction de uu'. On peut se proposer de rechercher toutes les fonctions Δu jouissant de cette propriété, car on pourrait leur étendre la méthode précédente; mais, dans cette recherche, qui n'offre pas de grandes difficultés, on ne trouve que le cas déjà connu des fonctions elliptiques.

III.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème que j'ai donné, et qui est la généralisation de l'élégant théorème de M. Dupin sur les sections coniques.

Les courbes que nous avons à étudier sont des courbes planes ou sphériques dont l'équation est

$$ar+br'+cr''=0,$$

r, r', r'' désignant les distances à trois points pris dans le plan ou sur la sphère qui contient la courbe. Les courbes planes étant les projections stéréographiques des courbes sphériques, leurs propriétés se déduiront des propriétés de celles-ci.

J'ai montré, dans un article inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, que les propriétés des courbes sphériques s'obtiennent sans difficulté si on les étudie comme courbes d'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.

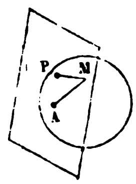
Considérons d'une manière générale la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. Par cette courbe, passent quatre cônes du second degré dont les sommets forment un tétraèdre conjugué commun à la sphère et à la surface du second degré. Prenons un de ces cônes et trois quelconques des quatre plans tangents communs à la sphère et au cône. Soient $P=0$, $P'=0$, $P''=0$ les équations de ces

plans tangents. Celle du cône pourra être mise sous la forme

$$\lambda\sqrt{P} + \mu\sqrt{P'} + \sqrt{P''} = 0.$$

Soit un plan tangent quelconque à la sphère (*fig.* 2). La distance MA

Fig. 2.



d'un point quelconque de la sphère au point de contact, et la distance MP au plan tangent, sont liées par la relation très-simple

$$\overline{MA}^2 = 2R.MP.$$

Par suite, si on désigne par r, r', r'' les distances d'un point de la sphère aux points de contact des plans P, P′, P″ on aura

$$r^2 = 2R.P, \quad r'^2 = 2R.P', \quad r''^2 = 2R.P'',$$

donc r, r', r'' seront liés par la relation

$$(9) \qquad \lambda r + \mu r' + r'' = 0,$$

c'est-à-dire qu'il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe d'intersection à trois points fixes qui sont des foyers.

La réciproque est évidemment vraie.

On peut prendre trois quelconques des quatre plans tangents communs au cône et à la sphère. Donc, à nos trois foyers on peut en adjoindre un quatrième jouissant des mêmes propriétés, et nos quatre foyers sont situés sur le cercle de contact du cône tangent à la sphère mené par le sommet du cône donné.

Comme on a quatre cônes du second degré, on aura quatre groupes de quatre foyers, et les quatre cercles ainsi obtenus se couperont à angle droit, d'après une propriété connue du tétraèdre conjugué dans la sphère.

Mais on peut généraliser beaucoup la relation (9) en considérant trois plans tangents quelconques au cône du second degré : soient Q, Q', Q'' ces trois plans tangents; l'équation du cône sera encore de la forme

$$\lambda\sqrt{Q} + \mu\sqrt{Q'} + \sqrt{Q''} = 0.$$

Ces trois plans coupent la sphère suivant trois cercles doublement tangents à la courbe d'intersection du cône et de la sphère. Par ces trois cercles faisons passer trois sphères fixes. Soient t, t', t'' les longueurs des tangentes menées d'un point à nos trois sphères. Pour tout point de la sphère contenant notre courbe on aura

$$t^2 = aQ, \quad t'^2 = a'Q', \quad t''^2 = a''Q''.$$

L'équation du cône du second degré nous conduira donc à la relation

$$(10) \qquad \lambda_1 t + \mu_1 t' + t'' = 0$$

entre les trois tangentes t, t', t''. Dans le cas que nous avions examiné, nos sphères se réduisaient à trois points.

Soit d'une manière générale

$$f(P, P', P'', P''') = 0$$

l'équation d'une surface passant par notre courbe; on pourra remplacer cette équation par une équation de la forme

$$F(at^2, bt'^2, ct''^2, dt'''^2) = 0.$$

Par exemple, on sait que l'équation d'un cône peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$PP' = P''P'''.$$

Donc l'équation de notre courbe pourra s'écrire d'une infinité de manières,

$$tt' = kt''t'''.$$

On voit encore que la courbe sur la sphère peut être considérée

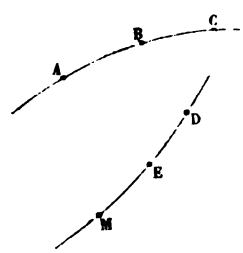
comme l'enveloppe d'une série de cercles dont les plans sont tangents aux cônes du second degré. Ces cercles coupent à angle droit le cercle focal, puisque leurs plans vont passer par le pôle du plan focal. De plus, leurs plans enveloppant un cône, leurs pôles sont sur une conique sphérique. Donc nos courbes peuvent être considérées comme enveloppes de cercles orthogonaux à un cercle fixe, et ayant leurs centres sur une conique sphérique, et cela de quatre manières différentes.

Sans insister sur ce mode de recherche, j'arrive au théorème qu'il s'agit d'établir.

Parmi tous les cercles doublement tangents à la courbe, il y en a généralement d'imaginaires. Alors deux des sphères passant par ce cercle se réduiront à deux points réels. On aura donc une courbe formée par ces points réels. Mais le lieu des points sphères coupant la sphère fixe suivant un cercle orthogonal au cercle focal est la sphère orthogonale à la sphère fixe et passant par le cercle focal. Ainsi la courbe lieu des points sphères doublement tangents à la courbe d'intersection est une courbe sphérique située sur une sphère orthogonale à la sphère donnée : cela nous suffit. Nous appelons cette courbe *courbe focale*.

Dans la relation (10) nos sphères se réduisant à des points, les tangentes t, t', t'' doivent être remplacées par des distances aux centres r, r', r''. On voit donc que si l'on prend trois points quelconques de la courbe focale, ils jouissent des propriétés métriques que nous avons reconnues aux foyers.

Fig. 3.



Prenons trois points D, E, M sur la courbe focale (*fig.* 3) et désignons par r, r', r'' les distances à ces trois foyers. On aura pour trois

points quelconques A, B, C de la courbe d'intersection

$$r_a = \lambda r'_a + \mu r''_a,$$
$$r_b = \lambda r'_b + \mu r''_b,$$
$$r_c = \lambda r''_c + \mu r''_c.$$

On pourra donc trouver deux coefficients λ_1, μ_1, tels, que l'on ait

$$r_a = \lambda_1 r_b + \mu_1 r_c,$$
$$r'_a = \lambda_1 r'_b + \mu_1 r'_c,$$
$$r''_a = \lambda_1 r''_b + \mu_1 r''_c.$$

Les deux premières équations déterminent λ_1 et μ_1. Si l'on a fixé les points A, B, C, D, E, la troisième sera satisfaite pour tout point M de la courbe focale. C'est donc l'équation de la courbe focale. On voit donc que trois points quelconques A, B, C pris sur la courbe primitive peuvent servir de foyers à la focale. Donc on a deux courbes sphériques de même genre et telles, que chacune est la focale de l'autre.

C'est la généralisation du théorème de M. Dupin sur les coniques focales.

A chaque courbe correspondent quatre focales. Ces quatre focales sont situées sur une même surface développable, dont elles sont lignes doubles. Chacune d'elles peut servir de focale aux trois autres, et elles sont situées sur quatre sphères orthogonales deux à deux.

Je donnerai en terminant une propriété relative à un cas particulier des courbes que nous venons d'étudier.

La courbe d'intersection d'un cylindre et d'une sphère peut être considérée comme le lieu des points tels, que la somme ou la différence des arcs de grand cercle qu'on peut mener tangents à un petit cercle d'un point de la courbe soit constante.

C'est la généralisation de la propriété des coniques sphériques (*).

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, et *Bulletin de la Société Philomathique*, 1867.

SUR

LES DÉTERMINANTS FONCTIONNELS

ET

LES COORDONNÉES CURVILIGNES,

PAR M. ED. COMBESCURE,

AGRÉGÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Les recherches suivantes ont principalement pour objet une certaine extension au cas général des coordonnées curvilignes obliques de la grande théorie créée par M. Lamé. J'ajoute néanmoins quelques remarques qui ne sont peut-être pas sans importance, touchant les systèmes orthogonaux. Enfin j'ai cru devoir rattacher toute cette théorie à celle des déterminants fonctionnels, dont je rappelle les propriétés qui me sont utiles, en les déduisant de la considération de formes quadratiques.

§ I. — *Forme quadratique du produit de deux déterminants. — Identités qui en proviennent.*

Soient les deux déterminants, aux éléments tout à fait indépendants,

$$X = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad Z = \begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & \dots & z_n^{(1)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & \dots & z_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & \dots & z_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

et leur produit

$$V = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,n} \end{vmatrix}$$

dans lequel $v_{i,j} = \sum\limits_g x_i^{(g)} z_j^{(g)}$, la sommation s'étendant de $g = 1$ à $g = n$, ainsi que cela sera toujours sous-entendu pour tous les indices sommatoires.

De

$$\frac{dV}{dx_i^{(g)}} = Z \frac{dX}{dx_i^{(g)}}, \quad \frac{dV}{dz_i^{(g)}} = X \frac{dZ}{dz_i^{(g)}},$$

on conclut tout de suite

$$\sum_g x_j^{(g)} \frac{dV}{dx_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } V, \quad \sum_g z_j^{(g)} \frac{dV}{dz_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } V,$$

les seconds membres étant o ou V, suivant que les indices i, j sont différents ou coïncident. Cela posé, on peut représenter le déterminant V par l'une quelconque des n formes quadratiques

$$F^{(g)} = \sum_{i,j} C_{i,j} x_i^{(g)} z_j^{(g)}$$

répondant aux n valeurs de g, et dans lesquelles les *coefficients* $C_{i,j}$ conservent les mêmes valeurs. En effet, dans ces hypothèses et à cause de

$$\frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = \sum_j C_{i,j} z_j^{(g)}, \quad \frac{dF^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = \sum_i C_{i,j} x_i^{(g)}$$

on aura, par ce qui précède immédiatement,

$$(a) \quad \begin{cases} V \text{ ou } 0 = \sum\limits_g x_k^{(g)} \dfrac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = \sum\limits_j C_{i,j} \sum\limits_g x_k^{(g)} z_j^{(g)} = \sum\limits_j C_{i,j} v_{k,j}, \\ V \text{ ou } 0 = \sum\limits_g z_k^{(g)} \dfrac{dF^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = \sum\limits_i C_{i,j} \sum\limits_g x_k^{(g)} x_i^{(g)} = \sum\limits_i C_{i,j} v_{k,i}; \end{cases}$$

et des n^2 égalités formées par les membres extrêmes on tirera, pour

le coefficient $C_{i,j}$, la valeur symétrique $\frac{dV}{dv_{i,j}}$. On aura donc

$$F^{(g)} = \sum_{i,j} \frac{dV}{dv_{i,j}} x_i^{(g)} z_j^{(g)} = V.$$

En multipliant par $\frac{dF^{(g)}}{dz_h^{(g)}}$ l'expression ci-dessus de $\frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}}$ et prenant ensuite la $\sum\limits_g$, il viendra

$$\sum_g \frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} \frac{dF^{(g)}}{dz_h^{(g)}} = \sum_j C_{i,j} \sum_g z_j^{(g)} \frac{dF^{(g)}}{dz_h^{(g)}};$$

et comme, en vertu de (a), tous les termes du second membre disparaissent, excepté pour $j = h$, il en résulte

$$\text{(b)} \qquad \sum_g \frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} \frac{dF^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = VC_{i,j} = V \frac{dV}{dv_{i,j}}.$$

Si l'on suppose, pour un moment, que les deux déterminants X et Z coïncident tour à tour l'un avec l'autre, et que l'on pose

$$X^2 = P = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \xi_{1,2} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1,n} & \xi_{2,n} & \cdots & \xi_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad Z^2 = Q = \begin{vmatrix} \zeta_{1,1} & \zeta_{1,2} & \cdots & \zeta_{1,n} \\ \zeta_{1,2} & \zeta_{2,2} & \cdots & \zeta_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_{1,n} & \zeta_{2,n} & \cdots & \zeta_{n,n} \end{vmatrix},$$

où

$$\xi_{i,j} = \xi_{j,i} = \sum_g x_i^{(g)} x_j^{(g)}, \quad \zeta_{i,j} = \zeta_{j,i} = \sum_g z_i^{(g)} z_j^{(g)} \quad \text{et} \quad PQ = V^2;$$

on aura, comme cas particulier de ce qui vient d'être dit, ou par des considérations directes tout à fait pareilles à celles qui précèdent,

$$2f^{(g)} = \sum_{i,j} A_{i,j}\, x_i^{(g)} x_j^{(g)} = P, \quad 2\mathrm{f}^{(g)} = \sum_{i,j} B_{i,j}\, z_i^{(g)} z_j^{(g)} = Q,$$

où

$$A_{i,j} = A_{j,i} = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi_{i,j}}, \quad A_{i,i} = \frac{dP}{d\xi_{i,i}}, \quad B_{i,j} = B_{j,i} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{d\zeta_{i,j}}, \quad B_{i,i} = \frac{dQ}{d\zeta_{i,i}},$$

les formes f, f vérifiant les relations

$$\text{(a*)} \qquad \sum_g x_j^{(g)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } P, \quad \sum_g z_j^{(g)} \frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } Q,$$

et donnant lieu aux identités

$$(\mathrm{b}^*)\qquad \sum_g \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}}\frac{df^{(g)}}{dx_j^{(g)}} = \mathrm{PA}_{i,j},\quad \sum_g \frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_i^{(g)}}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = \mathrm{QB}_{i,j}.$$

Maintenant il est aisé de voir que

$$(\mathrm{c})\qquad \left\{\begin{aligned} x_i^{(g)} &= \frac{1}{\mathrm{Q}}\sum_h v_{i,h}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_h^{(g)}} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_h \xi_{i,h}\frac{d\mathrm{F}^{(g)}}{dx_h^{(g)}};\\ z_i^{(g)} &= \frac{1}{\mathrm{P}}\sum_h v_{h,i}\frac{df^{(g)}}{dx_h^{(g)}} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_h \zeta_{i,h}\frac{d\mathrm{F}^{(g)}}{dz_h^{(g)}}: \end{aligned}\right.$$

car de la première ligne, par exemple, multipliée tour à tour par $x_j^{(g)}$ et par $z_j^{(g)}$, puis sommée par $\sum_g$, on conclut

$$\xi_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_h \xi_{i,h}\sum_g x_j^{(g)}\frac{d\mathrm{F}^{(g)}}{dx_h^{(g)}},\quad v_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{Q}}\sum_h v_{i,h}\sum_g z_j^{(g)}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_h^{(g)}},$$

où l'on voit tous les termes des seconds membres disparaître, en vertu de (a) (a*), excepté celui qui répond à $h=j$.

En multipliant entre elles les deux premières expressions de $x_i^{(g)}$, $z_j^{(g)}$ et sommant par $\sum_g$, il vient

$$\xi_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{Q}^2}\sum_h\sum_k v_{i,h}v_{j,k}\sum_g \frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_h^{(g)}}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_k^{(g)}},$$

c'est-à-dire, par (b*),

$$(\mathrm{d})\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_{i,j} &= \frac{1}{\mathrm{Q}}\sum_{h,k} v_{i,h}v_{j,k}\mathrm{B}_{h,k},\\ &\text{et semblablement}\\ \zeta_{i,j} &= \frac{1}{\mathrm{P}}\sum_{h,k} v_{h,i}v_{k,j}\mathrm{A}_{h,k}. \end{aligned}\right.$$

La multiplication des deux dernières expressions de $x_i^{(g)}$, $z_j^{(g)}$ donne aussi

$$v_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_{h,k}\xi_{i,h}\zeta_{j,k}\mathrm{C}_{h,k}.$$

Lorsque les x et les z sont liées par les conditions $v_{i,j} = 0$ ou 1

(suivant que j est ou n'est pas différent de i), les formules (c) (d) se réduisent à

$$(c^*)\left\{\begin{aligned} x_i^{(g)} &= \frac{1}{Q}\frac{d\mathfrak{f}^{(g)}}{dz_i^{(g)}} = \sum_j \xi_{i,j}\, z_j^{(g)},\\ z_i^{(g)} &= \frac{1}{P}\frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = \sum_j \zeta_{i,j}\, x_i^{(g)};\end{aligned}\right. \qquad (d^*)\left\{\begin{aligned} \xi_{i,j} &= \frac{1}{Q}\,B_{i,j},\\ \zeta_{i,j} &= \frac{1}{P}\,A_{i,j},\end{aligned}\right.$$

où $PQ = V^2 = 1$. Les formes f, $\mathfrak{f}$, de leur côté, reviennent à

$$\frac{2f^{(g)}}{P} = \sum_{i,j}\zeta_{i,j}\,x_i^{(g)}x_j^{(g)} = 1, \qquad \frac{2\mathfrak{f}^{(g)}}{Q} = \sum_{i,j}\xi_{i,j}\,z_i^{(g)}z_j^{(g)} = 1,$$

et l'expression de $v_{i,j}$ qui fait suite à (d) donne $\sum_h \xi_{i,h}\zeta_{j,h} = 0$ ou 1.

On retombe ainsi, sauf des différences de forme, sur quelques résultats connus de la théorie des déterminants fonctionnels, en supposant

$$x_i^{(g)} = \frac{du_g}{d\alpha_i}, \qquad z_i^{(g)} = \frac{d\alpha_i}{du_g};$$

les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des fonctions des $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pris pour variables indépendantes, ou réciproquement.

§ II. — *Relations différentielles. — Distinction de deux groupes d'éléments.*

En désignant par t une variable indépendante quelconque, et posant généralement

$$(e) \qquad \sum_g x_i^{(g)}\frac{dx_j^{(g)}}{dt_1} = R_{i,j}^{(t)},$$

de sorte que

$$R_{i,j}^{(t)} + R_{j,i}^{(t)} = \frac{d\xi_{i,j}}{dt},$$

il est facile de reconnaître que l'on a identiquement

$$(f) \qquad P\frac{dx_h^{(g)}}{dt} = \sum_i R_{i,h}^{(t)}\frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}};$$

car on conclut de là, en multipliant par $x_k^{(g)}$ et prenant la $\sum\limits_k$,

$$P\sum_g x_k^{(g)}\frac{dx_h^{(g)}}{dt}=\sum_i R_{i,h}^{(t)}\sum_g x_k^{(g)}\frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}},$$

où, en vertu de (a*), tous les termes disparaissent dans le second membre, à l'exception de celui qui répond à $i=k$.

De l'équation (f), multipliée par $\frac{df^{(g)}}{dx_j^{(g)}}$, puis sommée par $\sum\limits_g$, on tire, en intervertissant $\sum\limits_g$, $\sum\limits_i$, et ayant égard à (b*),

$$\sum_g \frac{df^{(g)}}{dx_j^{(g)}}\frac{dx_h^{(g)}}{dt}=\sum_i A_{i,j}R_{i,h}^{(t)}: \tag{g}$$

et dès lors, s étant une autre variable indépendante quelconque, on aura, en multipliant (f) par $\frac{dx_k^{(g)}}{ds}$,

$$P\sum_g \frac{dx_h^{(g)}}{dt}\frac{dx_k^{(g)}}{ds}=\sum_i R_{i,h}^{(t)}\sum_g \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}}\frac{dx_k^{(g)}}{ds}=\sum_i R_{i,h}^{(t)}\sum_j A_{i,j}R_{j,k}^{(s)}$$

ou bien

$$P\sum_g \frac{dx_h^{(g)}}{dt}\frac{dx_k^{(g)}}{ds}=\sum_{i,j} A_{i,j}R_{i,h}^{(t)}R_{j,k}^{(s)}. \tag{h}$$

Maintenant, de

$$R_{h,k}^{(s)}=\sum_g x_h^{(g)}\frac{dx_k^{(g)}}{ds}$$

résulte

$$\frac{dR_{h,k}^{(s)}}{dt}=\sum_g \frac{dx_h^{(g)}}{dt}\frac{dx_k^{(g)}}{ds}+\sum_g x_h^{(g)}\frac{d^2x_k^{(g)}}{dt\,ds};$$

d'où, en échangeant t et s et ayant égard à (h), on tire

$$\frac{dR_{h,k}^{(s)}}{dt}-\frac{dR_{h,k}^{(t)}}{ds}=\frac{1}{P}\sum_{i,j}A_{i,j}\left(R_{i,h}^{(t)}R_{j,k}^{(s)}-R_{i,h}^{(s)}R_{j,k}^{(t)}\right). \tag{k}$$

Cette équation multiple, qui ne me paraît pas avoir été remarquée généralement, exprime en particulier les conditions d'intégralité des

systèmes simultanés d'équations linéaires

$$(\mathrm{f}') \qquad \mathrm{P}\frac{dx_h^{(g)}}{dt} = \sum_i \mathrm{R}_{i,h}^{(t)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}}, \quad \mathrm{P}\frac{dx_h^{(g)}}{ds} = \sum_i \mathrm{R}_{i,h}^{(s)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}},$$

lorsqu'on se propose d'en déduire les x, toutes les autres quantités étant censées connues en t et en s. On aurait de nouvelles conditions, tout à fait pareilles, si l'on introduisait un nombre quelconque de variables indépendantes, $t, s, \ldots$; et l'on peut observer que l'ensemble des systèmes (f') peut être intégré, sous les conditions analogues à (k), comme une suite de systèmes linéaires séparés aux différentielles ordinaires.

Dans le cas des déterminants fonctionnels, les R sont soumis à des conditions spéciales qui proviennent de la relation

$$\frac{dx_i^{(g)}}{d\alpha_j} = \frac{dx_j^{(g)}}{d\alpha_i}:$$

d'où l'on tire

$$\sum_g x_h^{(g)} \frac{dx_i^{(g)}}{d\alpha_j} = \sum_g x_h^{(g)} \frac{dx_j^{(g)}}{d\alpha_i},$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{l}) \qquad \mathrm{R}_{h,i}^{(\alpha_j)} = \mathrm{R}_{h,j}^{(\alpha_i)}.$$

Cette relation, combinée avec $\mathrm{R}_{i,j}^{(\alpha_h)} + \mathrm{R}_{j,i}^{(\alpha_h)} = \frac{d\xi_{i,j}}{d\alpha_h}$, fournit

$$(\mathrm{m}) \qquad \mathrm{R}_{j,i}^{(\alpha_h)} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi_{i,j}}{d\alpha_h} + \frac{d\xi_{j,h}}{d\alpha_i} - \frac{d\xi_{i,h}}{d\alpha_j}\right):$$

ce qui permet, si on le juge à propos, d'introduire partout les ξ au lieu des R.

En vue surtout de la théorie des coordonnées curvilignes, il convient d'opérer une substitution particulière dans les formules précédentes, en se bornant au cas des déterminants fonctionnels. Je poserai

$$\left\{\begin{array}{l} x_i^{(g)} = l_i a_i^{(g)}, \\ \xi_{i,j} = l_i l_j \lambda_{i,j}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z_i^{(g)} = \mathrm{h}_i \mathrm{a}_i^{(g)}, \\ \zeta_{i,j} = \mathrm{h}_i \mathrm{h}_j \theta_{i,j}, \end{array}\right.$$

sous les conditions $\lambda_{i,i} = 1$, $\theta_{i,i} = 1$, de sorte qu'on aura

$$\sum_g a_i^{(g)} a_j^{(g)} = \lambda_{i,j}, \quad \sum_g \mathrm{a}_i^{(g)} \mathrm{a}_j^{(g)} = \theta_{i,j}.$$

Les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \dots & \lambda_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \nabla = \begin{vmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & \dots & \theta_{1,n} \\ \theta_{1,2} & \theta_{2,2} & \dots & \theta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{1,n} & \theta_{2,n} & \dots & \theta_{n,n} \end{vmatrix}$$

seront liés par la relation

$$\mathrm{h}_1 \mathrm{h}_2 \dots \mathrm{h}_n \sqrt{\nabla} \cdot l_1 l_2 \dots l_n \sqrt{\Delta} = 1.$$

On pourra prendre pour les formes f, f les suivantes :

$$(\varphi) \quad \begin{cases} 2\varphi^{(g)} = \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{1,1}} a_1^{(g)} a_1^{(g)} + \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{1,2}} a_1^{(g)} a_2^{(g)} + \dots + \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{n,n}} a_n^{(g)} a_n^{(g)} = \Delta, \\ 2\varpi^{(g)} = \dfrac{d\nabla}{d\theta_{1,1}} \mathrm{a}_1^{(g)} \mathrm{a}_1^{(g)} + \dfrac{d\nabla}{d\theta_{1,2}} \mathrm{a}_1^{(g)} \mathrm{a}_2^{(g)} + \dots + \dfrac{d\nabla}{d\theta_{n,n}} \mathrm{a}_n^{(g)} \mathrm{a}_n^{(g)} = \nabla, \end{cases}$$

où il est entendu que les $\lambda_{i,i}$, $\theta_{i,i}$ sont remplacés par l'unité après les différentiations. Elles vérifieront les relations

$$a^*) \qquad \sum_g a_j^{(g)} \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i} = 0 \text{ ou } \Delta, \qquad \sum_g \mathrm{a}_j^{(g)} \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } \nabla,$$

$$(b^*) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_g \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}} \frac{d\varphi^{(g)}}{da_j^{(g)}} = \frac{1}{2} \Delta \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}}, \\ \displaystyle\sum_g \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}} \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}} = \Delta \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_g \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_j^{(g)}} = \frac{1}{2} \nabla \frac{d\nabla}{d\theta_{i,j}}, \\ \displaystyle\sum_g \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} = \nabla \frac{d\nabla}{d\theta_{i,i}}. \end{cases}$$

On aura ensuite, d'après ce que deviennent les (d*),

$$(d^*) \quad \begin{cases} \theta_{i,j} = \dfrac{\dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}}}{2\sqrt{\dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}} \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{j,j}}}}, \\ \mathrm{h}_i^2 = \dfrac{1}{l_i^2} \cdot \dfrac{1}{\Delta} \cdot \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{i,j} = \dfrac{\dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,j}}}{2\sqrt{\dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,i}} \dfrac{d\nabla}{d\theta_{j,j}}}}, \\ l_i^2 = \dfrac{1}{\mathrm{h}_i^2} \cdot \dfrac{1}{\nabla} \cdot \dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,i}}. \end{cases}$$

Les (c) seront remplacées par

$$(c^*) \qquad \mathrm{a}_i^{(g)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}}}} \cdot \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}}, \qquad a_i^{(g)} = \frac{1}{\sqrt{\nabla \dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,i}}}} \cdot \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}}.$$

Enfin, en posant

$$(e) \qquad \sum_g a_i^{(g)} \frac{da_i^{(g)}}{dt} = \mathfrak{R}_{i,j}^{(t)},$$

de sorte que

$$\mathfrak{R}_{i,j}^{(t)} + \mathfrak{R}_{j,i}^{(t)} = \frac{d\lambda_{i,j}}{dt},$$

on aura ici

$$(f) \qquad \Delta \frac{da_i^{(g)}}{dt} = \sum_h \mathfrak{R}_{h,i}^{(t)} \frac{d\varphi_{(g)}}{da_h^{(g)}},$$

$$(h) \qquad \Delta \sum_g \frac{da_h^{(g)}}{dt} \frac{da_k^{(g)}}{ds} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}} \mathfrak{R}_{j,h}^{(t)} \mathfrak{R}_{i,k}^{(s)},$$

$$(k) \qquad \Delta \left(\frac{d\mathfrak{R}_{h,k}^{(t)}}{ds} - \frac{d\mathfrak{R}_{h,k}^{(s)}}{dt} \right) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}} \left(\mathfrak{R}_{j,k}^{(t)} \mathfrak{R}_{i,h}^{(s)} - \mathfrak{R}_{j,k}^{(s)} \mathfrak{R}_{i,h}^{(t)} \right),$$

où $\mathfrak{R}_{i,i} = 0$. Cette dernière condition introduit une simplification dans les groupes (f), (h), (k), par comparaison avec les groupes homologues (f), (h), (k). Par contre, la condition (l) est remplacée par cette autre un peu plus complexe

$$(l) \qquad \frac{dl_i}{d\alpha_j} \lambda_{h,i} + l_i \mathfrak{R}_{h,i}^{(\alpha_j)} = \frac{dl_j}{d\alpha_i} \lambda_{h,j} + l_j \mathfrak{R}_{h,j}^{(\alpha_i)}.$$

Que si l'on voulait se débarrasser partout des $\mathfrak{R}$, il suffirait d'avoir égard à (m), en observant que

$$\mathrm{R}_{i,j}^{(t)} = l_i l_j \mathfrak{R}_{i,j}^{(t)} + \lambda_{i,j} l_i \frac{dl_j}{dt}.$$

Ces préliminaires posés, j'aborde la théorie des coordonnées curvilignes; mais, pour simplifier autant que possible la notation, je représenterai u_1, u_2, u_3 par x, y, z; α_1, α_2, α_3 par α, β, γ; l_1, l_2, l_3 par l, m, n; $\lambda_{2,3}$, $\lambda_{1,3}$, $\lambda_{1,2}$ par λ, μ, ν; h_1, h_2, h_3 par $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; $\theta_{2,3}$, $\theta_{1,3}$, $\theta_{1,2}$ par ε, η, θ; $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, a_2^{(3)}, a_3^{(1)}, a_3^{(2)}, a_3^{(3)}$ par $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$; enfin $\mathrm{a}_1^{(1)}, \mathrm{a}_1^{(2)}, \mathrm{a}_1^{(3)}, \ldots$ par $\mathrm{a}, \mathrm{a}', \mathrm{a}'', \ldots$.

§ III. — *Coordonnées curvilignes. — Développement des formules.*

Les coordonnées rectilignes orthogonales d'un point quelconque de l'espace étant x, y, z, soient

$$F(x, y, z) = \alpha, \quad F_1(x, y, z) = \beta, \quad F_2(x, y, z) = \gamma$$

les équations de trois surfaces où α, β, γ désignent trois paramètres arbitraires qui n'entrent pas dans les premiers membres. Pour chaque système de valeurs attribuées à ces paramètres, l'intersection mutuelle des trois surfaces déterminera, d'après la conception féconde de M. Lamé, un point M de l'espace. Les éléments linéaires des intersections, issus de ce point, étant représentés par $l\,d\alpha$, $m\,d\beta$, $n\,d\gamma$ et λ, μ, ν désignant les cosinus des angles que font entre eux ces éléments, on aura ce premier groupe :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dx^2}{d\alpha^2}+\frac{dy^2}{d\alpha^2}+\frac{dz^2}{d\alpha^2}=l^2, &&\frac{dx}{d\beta}\frac{dx}{d\gamma}+\frac{dy}{d\beta}\frac{dy}{d\gamma}+\frac{dz}{d\beta}\frac{dz}{d\gamma}=mn\lambda,\\
&\frac{dx^2}{d\beta^2}+\frac{dy^2}{d\beta^2}+\frac{dz^2}{d\beta^2}=m^2, &&\frac{dx}{d\gamma}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dy}{d\gamma}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dz}{d\gamma}\frac{dz}{d\alpha}=nl\mu,\\
&\frac{dx^2}{d\gamma^2}+\frac{dy^2}{d\gamma^2}+\frac{dz^2}{d\gamma^2}=n^2, &&\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}=lm\nu,
\end{aligned}\right.$$

auquel on adjoindra le groupe réciproque

$$(\mathrm{A}')\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\alpha^2}{dx^2}+\frac{d\alpha^2}{dy^2}+\frac{d\alpha^2}{dz^2}=\mathfrak{l}^2, &&\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dy}+\frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dz}=\mathfrak{m}\mathfrak{n}\varepsilon,\\
&\frac{d\beta^2}{dx^2}+\frac{d\beta^2}{dy^2}+\frac{d\beta^2}{dz^2}=\mathfrak{m}^2, &&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dz}=\mathfrak{l}\mathfrak{n}\eta,\\
&\frac{d\gamma^2}{dx^2}+\frac{d\gamma^2}{dy^2}+\frac{d\gamma^2}{dz^2}=\mathfrak{n}^2, &&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=\mathfrak{l}\mathfrak{m}\theta.
\end{aligned}\right.$$

où $\frac{d\alpha}{\mathfrak{l}}$, $\frac{d\beta}{\mathfrak{m}}$, $\frac{d\gamma}{\mathfrak{n}}$ sont respectivement, au point M, les plus courtes distances de deux surfaces successives de la même famille, et ε, η, θ les

cosinus des angles que font entre elles ces plus courtes distances. On prendra ici

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\alpha}=la, & \dfrac{dx}{d\beta}=mb, & \dfrac{dx}{d\gamma}=nc, \\ \dfrac{dy}{d\alpha}=la'. & \dfrac{dy}{d\beta}=mb', & \dfrac{dy}{d\gamma}=nc', \\ \dfrac{dz}{d\alpha}=la'', & \dfrac{dz}{d\beta}=mb'', & \dfrac{dz}{d\gamma}=nc'', \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dx}=\mathrm{la}, & \dfrac{d\beta}{dx}=\mathrm{mb}, & \dfrac{d\gamma}{dx}=\mathrm{nc}, \\ \dfrac{d\alpha}{dy}=\mathrm{la}', & \dfrac{d\beta}{dy}=\mathrm{mb}', & \dfrac{d\gamma}{dy}=\mathrm{nc}', \\ \dfrac{d\alpha}{dz}=\mathrm{la}'', & \dfrac{d\beta}{dz}=\mathrm{mb}'', & \dfrac{d\gamma}{dz}=\mathrm{nc}''. \end{cases}$$

Tout ceci posé, on aura

$$\Delta = 1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu, \qquad \nabla = 1-\varepsilon^2-\eta^2-\theta^2+2\varepsilon\eta\theta,$$
$$lmn\sqrt{\Delta}.\mathrm{lmn}\sqrt{\nabla}=1, \qquad dV=\sqrt{\Delta}\,lmn\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

dV désignant l'élément de volume. Les formes (φ) deviendront

$$(2)\quad \begin{cases} \begin{cases} 2\varphi = (1-\lambda^2)a^2+(1-\mu^2)b^2+(1-\nu^2)c^2+\Delta_\lambda bc+\Delta_\mu ac+\Delta_\nu ab=\Delta, \\ 2\varphi' = (1-\lambda^2)a'^2+\ldots, \\ 2\varphi'' = (1-\lambda^2)a''^2+\ldots, \end{cases} \\ \begin{cases} 2\varpi = (1-\varepsilon^2)\mathrm{a}^2+(1-\eta^2)\mathrm{b}^2+(1-\theta^2)\mathrm{c}^2+\nabla_\varepsilon \mathrm{bc}+\nabla_\eta \mathrm{ac}+\nabla_\theta \mathrm{ab}=\nabla, \\ 2\varpi' = (1-\varepsilon^2)\mathrm{a}'^2+\ldots, \\ 2\varpi'' = (1-\varepsilon^2)\mathrm{a}''^2+\ldots, \end{cases} \end{cases}$$

les lettres placées en indices indiquent les dérivées partielles, de sorte que, par exemple, $\Delta_\lambda = 2(\mu\nu-\lambda)$. Ces formes vérifieront les conditions

$$(3)\quad \begin{cases} \Sigma a\dfrac{d\varphi}{da}=\Delta, \\ \Sigma b\dfrac{d\varphi}{da}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma \mathrm{a}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{a}}=\nabla, \\ \Sigma \mathrm{b}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{a}}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les Σ affectant toujours les accents. Les équations (c^*) s'écriront

$$(4)\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{a}=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}}\dfrac{d\varphi}{da}, & \mathrm{b}=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\mu^2)}}\dfrac{d\varphi}{db}, & \mathrm{c}=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\nu^2)}}\dfrac{d\varphi}{dc},\\ \mathrm{a}'=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}}\dfrac{d\varphi'}{da'}, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ \mathrm{a}''=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}}\dfrac{d\varphi''}{da''}, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{lll}a=\dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\varepsilon^2)}}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{a}}, & b=\dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\eta^2)}}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{b}}, & c=\dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\theta^2)}}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{c}},\\ a'=\dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\varepsilon^2)}}\dfrac{d\varpi'}{d\mathrm{a}'}, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\\ a''=\dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\varepsilon^2)}}\dfrac{d\varpi''}{d\mathrm{a}''}, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

et les (d^*)

$$(5)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{l}^2=\dfrac{1}{l^2}\dfrac{1-\lambda^2}{\Delta},\quad \varepsilon=\dfrac{\frac{1}{2}\Delta_\lambda}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}l^2=\dfrac{1}{\mathrm{l}^2}\dfrac{1-\varepsilon^2}{\nabla},\quad \lambda=\dfrac{\frac{1}{2}\nabla_\varepsilon}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\theta^2)}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

Ayant posé

$$(6)\left\{\begin{array}{lll}\Sigma b\dfrac{da}{dt}=\mathrm{R}^{(t)}, & \Sigma a\dfrac{dc}{dt}=\mathrm{Q}^{(t)}, & \Sigma c\dfrac{db}{dt}=\mathrm{P}^{(t)},\\ \Sigma a\dfrac{db}{dt}=\mathfrak{R}^{(t)}, & \Sigma c\dfrac{da}{dt}=\mathfrak{Q}^{(t)}, & \Sigma b\dfrac{dc}{dt}=\mathfrak{P}^{(t)},\end{array}\right.$$

ce qui entraîne

$$(6^*)\qquad \mathrm{R}^{(t)}+\mathfrak{R}^{(t)}=\frac{d\nu}{dt},\quad \mathrm{Q}^{(t)}+\mathfrak{Q}^{(t)}=\frac{d\mu}{dt},\quad \mathrm{P}^{(t)}+\mathfrak{P}^{(t)}=\frac{d\lambda}{dt},$$

où t est une quelconque des variables α, β, γ, les (f) s'écriront

$$(7)\left\{\begin{array}{l}\Delta\dfrac{da}{dt}=\mathrm{R}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{db}+\mathfrak{Q}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{dc},\\ \Delta\dfrac{db}{dt}=\mathrm{P}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{dc}+\mathfrak{R}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{da},\\ \Delta\dfrac{dc}{dt}=\mathrm{Q}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{da}+\mathfrak{P}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{db}.\end{array}\right.$$

et l'on aura deux groupes analogues en accentuant une fois et puis deux fois les lettres φ, a, b, c. Le groupe (k) deviendra ici

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{d\mathrm{R}^{(t)}}{ds}-\frac{d\mathrm{R}^{(s)}}{dt}\right) &= (1-\nu^2)(\mathrm{P}^{(s)}\mathfrak{Q}^{(t)}-\mathrm{P}^{(t)}\mathfrak{Q}^{(s)})+\frac{1}{2}\Delta_\lambda(\mathrm{R}^{(t)}\mathrm{P}^{(s)}-\mathrm{P}^{(t)}\mathrm{R}^{(s)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta_\mu(\mathfrak{Q}^{(t)}\mathfrak{R}^{(s)}-\mathfrak{Q}^{(s)}\mathfrak{R}^{(t)})+\frac{1}{2}\Delta_\nu(\mathrm{R}^{(t)}\mathfrak{R}^{(s)}-\mathrm{R}^{(s)}\mathfrak{R}^{(t)}),\\
\Delta\left(\frac{d\mathrm{Q}^{(t)}}{ds}-\frac{d\mathrm{Q}^{(s)}}{dt}\right) &= (1-\mu^2)(\mathrm{R}^{(s)}\mathfrak{P}^{(t)}-\mathrm{R}^{(t)}\mathfrak{P}^{(s)})+\frac{1}{2}\Delta_\lambda(\mathfrak{P}^{(t)}\mathfrak{Q}^{(s)}-\mathfrak{P}^{(s)}\mathfrak{Q}^{(t)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta_\mu(\mathrm{Q}^{(t)}\mathfrak{Q}^{(s)}-\mathrm{Q}^{(s)}\mathfrak{Q}^{(t)})+\frac{1}{2}\Delta_\nu(\mathrm{Q}^{(t)}\mathrm{R}^{(s)}-\mathrm{Q}^{(s)}\mathrm{R}^{(t)}),\\
\Delta\left(\frac{d\mathrm{P}^{(t)}}{ds}-\frac{d\mathrm{P}^{(s)}}{dt}\right) &= (1-\lambda^2)(\mathrm{Q}^{(s)}\mathfrak{R}^{(t)}-\mathrm{Q}^{(t)}\mathfrak{R}^{(s)})+\frac{1}{2}\Delta_\lambda(\mathrm{P}^{(t)}\mathfrak{P}^{(s)}-\mathrm{P}^{(s)}\mathfrak{P}^{(t)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta_\mu(\mathrm{P}^{(t)}\mathrm{Q}^{(s)}-\mathrm{P}^{(s)}\mathrm{Q}^{(t)})+\frac{1}{2}\Delta_\nu(\mathfrak{R}^{(t)}\mathfrak{P}^{(s)}-\mathfrak{R}^{(s)}\mathfrak{P}^{(t)}).
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin on déduira des équations (l), en isolant les dérivées partielles de l, m, n,

$$
(9)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{dl}{d\beta} &= \frac{m}{1-\nu^2}\mathfrak{R}^{(\alpha)}+\frac{\nu l}{1-\nu^2}\mathrm{R}^{(\beta)},\\
\frac{dm}{d\gamma} &= \frac{n}{1-\lambda^2}\mathfrak{P}^{(\beta)}+\frac{\lambda m}{1-\lambda^2}\mathrm{P}^{(\gamma)},\\
\frac{dn}{d\alpha} &= \frac{l}{1-\mu^2}\mathfrak{Q}^{(\gamma)}+\frac{\mu n}{1-\mu^2}\mathrm{Q}^{(\alpha)},\\
\frac{dl}{d\gamma} &= \frac{n}{1-\mu^2}\mathrm{Q}^{(\alpha)}+\frac{\mu l}{1-\mu^2}\mathfrak{Q}^{(\gamma)},\\
\frac{dm}{d\alpha} &= \frac{l}{1-\nu^2}\mathrm{R}^{(\beta)}+\frac{\nu m}{1-\nu^2}\mathfrak{R}^{(\alpha)},\\
\frac{dn}{d\beta} &= \frac{m}{1-\lambda^2}\mathrm{P}^{(\gamma)}+\frac{\lambda n}{1-\lambda^2}\mathfrak{P}^{(\beta)},\\
\left[(1-\nu^2)\mathfrak{Q}^{(\beta)}+\frac{1}{2}\Delta_\lambda\mathrm{R}^{(\beta)}\right]l &= \left[(1-\nu^2)\mathrm{P}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\Delta_\mu\mathfrak{R}^{(\alpha)}\right]m,\\
\left[(1-\lambda^2)\mathfrak{R}^{(\gamma)}+\frac{1}{2}\Delta_\mu\mathrm{P}^{(\gamma)}\right]m &= \left[(1-\lambda^2)\mathrm{Q}^{(\beta)}+\frac{1}{2}\Delta_\nu\mathfrak{P}^{(\beta)}\right]n,\\
\left[(1-\mu^2)\mathfrak{P}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\Delta_\nu\mathrm{Q}^{(\alpha)}\right]n &= \left[(1-\mu^2)\mathrm{R}^{(\gamma)}+\frac{1}{2}\Delta_\lambda\mathfrak{Q}^{(\gamma)}\right]l,
\end{aligned}
\right.
$$

Je joindrai à ceci les équations des lignes de courbure des surfaces

coordonnées. Pour un déplacement infiniment petit, effectué sur la surface $\alpha =$ constante, on a

$$\delta x = \frac{dx}{d\beta} d\beta + \frac{dx}{d\gamma} d\gamma,$$

et par suite

$$\Sigma b \delta x = m d\beta + n\lambda d\gamma, \quad \Sigma c \delta x = m\lambda d\beta + n d\gamma. \tag{10}$$

Si le déplacement correspond à une ligne de courbure, on doit avoir

$$\delta x = -\Theta \delta \mathrm{a}, \quad \delta y = -\Theta \delta \mathrm{a}', \quad \delta z = -\Theta \delta \mathrm{a}'';$$

d'où l'on conclut facilement

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma b \delta x &= \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2}\Delta_\mu \mathrm{P}^{(\beta)} + (1-\lambda^2)\mathfrak{R}^{(\beta)}\right] d\beta \\ &\quad + \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2}\Delta_\mu \mathrm{P}^{(\gamma)} + (1-\lambda^2)\mathfrak{R}^{(\gamma)}\right] d\gamma, \\ \Sigma c \delta x &= \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2}\Delta_\nu \mathfrak{P}'^{(\beta)} + (1-\lambda^2)\mathrm{Q}^{(\beta)}\right] d\beta \\ &\quad + \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2}\Delta_\nu \mathfrak{P}^{(\gamma)} + (1-\lambda^2)\mathrm{Q}^{(\gamma)}\right] d\gamma. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

En égalant ces expressions de $\Sigma b\delta x$, $\Sigma c\delta x$ aux précédentes et éliminant ensuite Θ, on obtiendra l'équation des lignes de courbure de la surface $\alpha =$ constante. On obtiendra aussi deux valeurs pour Θ, qui seront les expressions des rayons principaux de courbure.

Remarque générale. — Les formules du présent paragraphe correspondent directement à la question différentielle, où, les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace étant arbitrairement exprimées par des fonctions déterminées de trois variables indépendantes de α, β, γ, on se proposerait de calculer les principaux éléments géométriques, soit des courbes d'intersection des surfaces coordonnées, soit de ces surfaces elles-mêmes.

Mais il se présente la question, autrement difficile, de trouver x, y, z en α, β, γ, lorsqu'on se donne trois conditions distinctes entre ces dernières variables et les $l, \ldots, \nu$, $\mathfrak{l}, \ldots, \theta$ ou d'autres quantités qui peuvent en dépendre. Alors les équations (8), concurremment avec (9)

et (6*), semblent jouer le principal rôle. Combinées avec les trois conditions données, elles suffisent à la détermination complète des fonctions $l, m, \ldots, \nu$ ou $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \ldots, \theta$ et des auxiliaires P, Q,.... Une fois ces quantités déterminées, il se présente la question bien plus simple, et que je m'en vais aborder, de déduire les cosinus $a, b, \ldots$ des équations (7) et des analogues, dont les (8) assurent précisément la coexistence. Après cela x, y, z s'obtiendront d'après (1) par l'intégration des différentielles exactes

$$(c) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dx = la\,d\alpha + mb\,d\beta + nc\,d\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

§ IV. — *Intégration d'un système particulier d'équations aux différences partielles.*

Les angles du trièdre élémentaire M.$(\alpha)(\beta)(\gamma)$ étant censés déterminés en α, β, γ, on peut concevoir menés par le sommet de ce trièdre trois axes rectangulaires M.X, Y, Z faisant successivement avec O.xyz des angles aux cosinus $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'', \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'', \mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$. En désignant par $\xi, \xi', \xi''; \eta, \eta', \eta''; \zeta, \zeta', \zeta''$ les cosinus des angles que font avec ces axes auxiliaires les éléments des axes curvilignes (α), (β), (γ) issus de M, on aura

$$\begin{array}{ll} a = \mathcal{A}\,\xi + \mathcal{B}\,\xi' + \mathcal{C}\,\xi'', & b = \mathcal{A}\eta + \mathcal{B}\eta' + \mathcal{C}\eta'', \ldots, \\ a' = \mathcal{A}'\xi + \mathcal{B}'\xi' + \mathcal{C}'\xi'', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

avec les six relations

$$\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 = 1, \ldots, \qquad \xi\eta + \xi'\eta' + \xi''\eta'' = \nu, \ldots;$$

et l'on pourra disposer des quelques $\xi, \eta, \ldots$ que ces relations laissent encore arbitraires, de façon à donner au système auxiliaire la position qu'on jugera la plus convenable relativement au trièdre élémentaire. Cela posé, si l'on fait

$$\begin{array}{lll} \Sigma\mathcal{B}\dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = r^{(t)}, & \Sigma\mathcal{A}\dfrac{d\mathcal{C}}{dt} = q^{(t)}, & \Sigma\mathcal{C}\dfrac{d\mathcal{B}}{dt} = p^{(t)}, \\ \Sigma\eta\,\dfrac{d\xi}{dt} = \upsilon^{(t)}, & \Sigma\xi\,\dfrac{d\zeta}{dt} = \varkappa^{(t)}, & \Sigma\zeta\,\dfrac{d\eta}{dt} = \pi^{(t)}, \end{array}$$

on déduira des valeurs précédentes de a, b, c, ...,

$$\begin{aligned}
\Sigma b \frac{da}{dt} &= (\xi\eta' - \eta\xi')r^{(t)} + (\eta\xi'' - \xi\eta'')q^{(t)} + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')p^{(t)} + \upsilon^{(t)},\\
\Sigma a \frac{dc}{dt} &= (\zeta\xi' - \xi\zeta')r^{(t)} + (\xi\zeta'' - \zeta\xi'')q^{(t)} + (\xi''\zeta' - \xi'\zeta'')p^{(t)} + \varkappa^{(t)},\\
\Sigma c \frac{db}{dt} &= (\eta\zeta' - \zeta\eta')r^{(t)} + (\zeta\eta'' - \eta\zeta'')q^{(t)} + (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')p^{(t)} + \pi^{(t)},
\end{aligned}$$

ce qui exprime linéairement les P, Q, R, et par suite les $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, au moyen des p, q, r, ou *vice versâ*, et des quantités censées connues.

Moyennant cette sorte de transformation de coordonnées, on sera amené à considérer, au lieu du système (7), le système canonique

$$(7^*)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}}{d\alpha} &= \mathcal{B}r^{(\alpha)} - \mathcal{C}q^{(\alpha)},\\
\frac{d\mathcal{B}}{d\alpha} &= \mathcal{C}p^{(\alpha)} - \mathcal{A}r^{(\alpha)},\\
\frac{d\mathcal{C}}{d\alpha} &= \mathcal{A}q^{(\alpha)} - \mathcal{B}p^{(\alpha)};
\end{aligned}\right.
\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}}{d\beta} &= \mathcal{B}r^{(\beta)} - \mathcal{C}q^{(\beta)},\\
\frac{d\mathcal{B}}{d\beta} &= \mathcal{C}p^{(\beta)} - \mathcal{A}r^{(\beta)},\\
\frac{d\mathcal{C}}{d\beta} &= \mathcal{A}q^{(\beta)} - \mathcal{B}p^{(\beta)};
\end{aligned}\right.
\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}}{d\gamma} &= \mathcal{B}r^{(\gamma)} - \mathcal{C}q^{(\gamma)},\\
\frac{d\mathcal{B}}{d\gamma} &= \mathcal{C}p^{(\gamma)} - \mathcal{A}r^{(\gamma)},\\
\frac{d\mathcal{C}}{d\gamma} &= \mathcal{A}q^{(\gamma)} - \mathcal{B}p^{(\gamma)};
\end{aligned}\right.$$

et deux autres tout à fait pareils en $\mathcal{A}'$, ..., $\mathcal{A}''$, ... On aura ici

$$\Sigma\, \mathcal{B}_t \mathcal{C}_s = -\, r^{(t)}q^{(s)}, \quad \Sigma\, \mathcal{A}_t \mathcal{A}_s = r^{(t)}r^{(s)} + q^{(t)}q^{(s)},$$

et les analogues, les lettres placées en indices indiquant des dérivées partielles, de sorte que $\mathcal{A}_t = \frac{d\mathcal{A}}{dt}$. Les p, q, r, censés connus en α, β, γ, sont supposés vérifier identiquement le groupe *fondamental*

$$(8^*)\qquad \left\{\begin{aligned}
r_s^{(t)} - r_t^{(s)} + q^{(t)}p^{(s)} - q^{(s)}p^{(t)} &= 0,\\
q_s^{(t)} - q_t^{(s)} + p^{(t)}r^{(s)} - p^{(s)}r^{(t)} &= 0,\\
p_s^{(t)} - p_t^{(s)} + r^{(t)}q^{(s)} - r^{(s)}q^{(t)} &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Du premier groupe (7*) on déduit

$$\mathcal{A} = A\sigma + B\tau + C\upsilon, \quad \mathcal{B} = A\sigma' + B\tau' + C\upsilon', \quad \mathcal{C} = A\sigma'' + B\tau'' + C\upsilon'',$$

A, B, C étant des fonctions arbitraires de β, γ, et les σ, τ, ... des fonc-

tions bien déterminées de α, β, γ, qui se déduisent d'une solution complète du premier groupe (7^*) (*voir* ci-après) intégré dans l'hypothèse de α seul variable. Ces fonctions doivent vérifier les relations ordinaires entre cosinus

$$\sigma^2 + \sigma'^2 + \sigma''^2 = 1, \quad \sigma\tau + \sigma'\tau' + \sigma''\tau'' = 0, \ldots,$$

à cause que l'on doit avoir, indépendamment de A, B, C,

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1,$$

et par suite

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

En exprimant que les valeurs précédentes de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ vérifient le second groupe (7^*), on en conclut

$$(7^{**}) \qquad A_\beta = Br' - Cq', \quad B_\beta = Cp' - Ar', \quad C_\beta = Aq' - Bp',$$

où

$$\begin{aligned} r' &= \Sigma\tau\sigma_\beta + \upsilon p^{(\beta)} + \upsilon' q^{(\beta)} + \upsilon'' r^{(\beta)}, \\ q' &= \Sigma\sigma\upsilon_\beta + \tau p^{(\beta)} + \tau' q^{(\beta)} + \tau'' r^{(\beta)}, \\ p' &= \Sigma\upsilon\tau_\beta + \sigma p^{(\beta)} + \sigma' q^{(\beta)} + \sigma'' r^{(\beta)}, \end{aligned}$$

ces quantités p', q', r' étant indépendantes de α. Les équations (7^{**}), qui sont de même forme que (7^*), mais ne renferment plus de trace de α, étant intégrées dans l'hypothèse de β seul variable, donneront

$$A = a\varphi + b\psi + c\chi, \quad B = a\varphi' + b\psi' + c\chi', \quad C = a\varphi'' + b\psi'' + c\chi'',$$

φ, ψ, ... étant des fonctions bien déterminées de β, γ qui vérifient les relations ordinaires entre cosinus, et a, b, c trois fonctions arbitraires de γ, telles que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. En substituant dans les expressions ci-dessus de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on aura des résultats de la forme

$$\mathcal{A} = a\xi + b\eta + c\zeta, \quad \mathcal{B} = a\xi' + b\eta' + c\zeta', \quad \mathcal{C} = a\xi'' + b\eta'' + c\zeta'',$$

aux seules inconnues a, b, c; et la vérification définitive du troisième groupe (7^*) donnera

$$(7^{***}) \qquad a_\gamma = br'' - cq'', \quad b_\gamma = cp'' - ar'', \quad c_\gamma = aq'' - bp'',$$

où

$$r'' = \Sigma\eta\xi_\gamma + \zeta p^{(\gamma)} + \zeta' q^{(\gamma)} + \zeta'' r^{(\gamma)},$$
$$q'' = \Sigma\xi\zeta_\gamma + \eta p^{(\gamma)} + \eta' q^{(\gamma)} + \eta'' r^{(\gamma)},$$
$$p'' = \Sigma\zeta\eta_\gamma + \xi p^{(\gamma)} + \xi' q^{(\gamma)} + \xi'' r^{(\gamma)},$$

les p'', q'', r'' ne dépendant que de γ. L'intégration du groupe (7^{***}), à la seule variable indépendante γ, donnera finalement

$$\mathrm{a} = g\theta + h\varpi + k\omega, \quad \mathrm{b} = g\theta' + h\varpi' + k\omega', \quad \mathrm{c} = g\theta'' + h\varpi'' + k\omega'',$$

g, h, k étant trois constantes arbitraires, telles que $g^2 + h^2 + k^2 = 1$, et les θ, ϖ,... vérifiant les relations ordinaires entre cosinus. On aura donc en remontant

$$(12)\quad \mathcal{A} = g\mathfrak{A} + h\mathfrak{B} + k\mathfrak{C}, \quad \mathcal{B} = g\mathfrak{A}' + h\mathfrak{B}' + k\mathfrak{C}', \quad \mathcal{C} = g\mathfrak{A}'' + h\mathfrak{B}'' + k\mathfrak{C}'',$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,... étant des fonctions actuellement connues de α, β, γ.

Quant aux expressions de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$, on les obtiendra évidemment en remplaçant, dans celles de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ qu'on vient de trouver, les constantes g, h, k par d'autres g', h', k', g'', h'', k'', et établissant entre ces constantes les relations habituelles entre cosinus

$$g^2 + h^2 + k^2 = 1, \quad gg' + hh' + kk' = 0, \ldots.$$

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que les p', q', r' ne doivent dépendre que de β, γ, et les p'', q'', r'' que de γ. Ceci résulte de la marche du calcul et des conditions d'intégrabilité (8^*) qui sont supposées remplies. On peut aussi le démontrer directement. Je me bornerai à prouver que $\dfrac{dr'}{d\alpha} = 0$. Des identités

$$\sigma_\alpha = \sigma' r^{(\alpha)} - \sigma'' q^{(\alpha)}, \quad \sigma'_\alpha = \sigma'' p^{(\alpha)} - \sigma r^{(\alpha)}, \quad \sigma''_\alpha = \sigma q^{(\alpha)} - \sigma' p^{(\alpha)}$$

et des analogues en τ,..., υ,... on conclut

$$\Sigma\tau\sigma_{\alpha\beta} = -\Sigma\upsilon p^{(\alpha)}_\beta + \Sigma(\tau'\sigma''_\beta - \tau''\sigma'_\beta)p^{(\alpha)}, \quad \Sigma\tau_\alpha\sigma_\beta = -\Sigma(\tau'\sigma''_\beta - \tau''\sigma'_\beta)p^{(\alpha)};$$

et par suite,

$$(\Sigma\tau\sigma_\beta)_\alpha = -\Sigma\upsilon p^{(\alpha)}_\beta, \quad r'_\alpha = \Sigma\upsilon\left(p^{(\beta)}_\alpha - p^{(\alpha)}_\beta\right) + \Sigma\upsilon_\alpha p^{(\beta)},$$

où l'on voit tous les termes s'entre-détruire quand on a égard à (8*) et aux équations que les υ vérifient.

Dans ce qui précède on a à intégrer trois fois de suite des systèmes rentrant dans le type classique, que l'on rencontre à propos de la rotation des corps,

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{dc}{dt} = aq - bp,$$

où p, q, r sont censées des fonctions connues du temps t. En faisant usage de la substitution imaginaire employée par M. Hoppe (*Journal de Crelle*, t. LXIII, p. 122),

$$b\sin\theta + c\cos\theta = 1, \quad b\cos\theta - c\sin\theta = ia, \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1},$$

substitution qui donne

$$\sin\theta\frac{db}{dt} + \cos\theta\frac{dc}{dt} + ia\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

on a, en ayant égard aux équations différentielles et posant $\tang\frac{\theta}{2} = z$,

$$2i\frac{dz}{dt} = 2rz + (q + ip)z^2 - (q - ip),$$

ensuite

$$i\frac{da}{dt} + (r\cos\theta + q\sin\theta)a + \frac{d\theta}{dt} - p = 0.$$

z étant déterminé par l'avant-dernière équation (de Bernoulli), la dernière donnera a par des quadratures; b et c s'ensuivront. De la connaissance de a, b, c on conclura tout de suite les trois systèmes particuliers qui, pour le premier groupe (7*) par exemple, étaient désignés par σ, σ', σ''; τ, τ', τ''; υ, υ', υ'' respectivement.

On peut varier de diverses manières l'intégration du système des neuf équations (7*). Je me bornerai à l'indication suivante : on tire de la première ligne horizontale (7*)

$$(13) \qquad \mathcal{B} = \frac{\mathcal{A}_\beta q^{(\gamma)} - \mathcal{A}_\gamma q^{(\beta)}}{r^{(\beta)}q^{(\gamma)} - r^{(\gamma)}q^{(\beta)}}, \quad \mathcal{C} = \frac{\mathcal{A}_\beta r^{(\gamma)} - \mathcal{A}_\gamma r^{(\beta)}}{r^{(\beta)}q^{(\gamma)} - r^{(\gamma)}q^{(\beta)}},$$

ce qui, en tenant compte de $\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2=1$, transforme le premier groupe vertical (7^*) dans

$$(14)\left\{\begin{aligned}&(q^{(\beta)}r^{(\gamma)}-q^{(\gamma)}r^{(\beta)})\mathcal{A}_\alpha+(r^{(\alpha)}q^{(\gamma)}-r^{(\gamma)}q^{(\alpha)})\mathcal{A}_\beta+(r^{(\beta)}q^{(\alpha)}-r^{(\alpha)}q^{(\beta)})\mathcal{A}_\gamma=0,\\&(q^{(\gamma)2}+r^{(\gamma)2})\mathcal{A}_\beta^2+(q^{(\beta)2}+r^{(\beta)2})\mathcal{A}_\gamma^2-2(q^{(\beta)}q^{(\gamma)}+r^{(\beta)}r^{(\gamma)})\mathcal{A}_\beta\mathcal{A}_\gamma\\&\qquad\qquad-(1-\mathcal{A}^2)(r^{(\beta)}q^{(\gamma)}-r^{(\gamma)}q^{(\beta)})^2=0,\\&\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{C}p^{(\alpha)}-\mathcal{A}r^{(\alpha)},\qquad \mathcal{C}_\alpha=\mathcal{A}q^{(\alpha)}-\mathcal{B}p^{(\alpha)},\end{aligned}\right.$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ étant censés remplacés par leurs valeurs précédentes dans les deux dernières, dont l'une est superflue en vertu des trois autres et des relations (8^*). La première des équations précédentes fera dépendre $\mathcal{A}$ arbitrairement de deux fonctions ϖ et ω bien déterminées. Considérant $\mathcal{A}$ comme dépendant immédiatement de ϖ et ω, la substitution dans les deux suivantes conduira à une équation du premier ordre et à une du second entre $\mathcal{A}$, ϖ et ω, quand on aura éliminé β et γ par exemple, au moyen des formes mêmes ϖ et ω, ce qui devra faire disparaître α. Il est facile de voir qu'on déduira de ces équations une équation du second ordre qu'on peut considérer comme aux différentielles ordinaires, en $d\omega$ par exemple. Les constantes introduites par son intégration étant considérées comme des fonctions arbitraires de ϖ, les équations déjà employées et la condition d'intégrabilité conduiront aisément à deux équations du premier ordre entre ces constantes, d'où ω devra finalement disparaître.

§ V. — *Systèmes triplement orthogonaux.*

Les cosinus λ, μ, ν étant égaux à zéro, les relations (9) se réduisent à

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&l_\beta=-m\mathrm{R}^{(\alpha)};\quad m_\gamma=-n\mathrm{P}^{(\beta)};\quad n_\alpha=-l\mathrm{Q}^{(\gamma)};\\&l_\gamma=n\mathrm{Q}^{(\alpha)};\quad m_\alpha=l\mathrm{R}^{(\beta)};\quad n_\beta=m\mathrm{P}^{(\gamma)};\end{aligned}\right.$$

$$(15^*)\qquad -l\mathrm{Q}^{(\beta)}=m\mathrm{P}^{(\alpha)},\quad -m\mathrm{R}^{(\gamma)}=n\mathrm{Q}^{(\beta)},\quad -n\mathrm{P}^{(\alpha)}=l\mathrm{R}^{(\gamma)}.$$

La multiplication des (15^*) montre que l'on doit avoir

$$(16)\qquad \mathrm{P}^{(\alpha)}=0,\quad \mathrm{Q}^{(\beta)}=0,\quad \mathrm{R}^{(\gamma)}=0,$$

l, m, n étant supposés différents de zéro.

Les identités (8) se réduisent, en vertu de (16), à

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lll} R_\gamma^{(\alpha)} = -Q^{(\alpha)}P^{(\gamma)}, & Q_\beta^{(\alpha)} = R^{(\alpha)}P^{(\beta)}, & P_\alpha^{(\beta)} = -R^{(\beta)}Q^{(\alpha)}, \\ R_\gamma^{(\beta)} = P^{(\beta)}Q^{(\gamma)}, & Q_\beta^{(\gamma)} = -R^{(\beta)}P^{(\gamma)}, & P_\alpha^{(\gamma)} = R^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}, \end{array}\right.$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} R_\beta^{(\alpha)} - R_\alpha^{(\beta)} + Q^{(\alpha)}P^{(\beta)} = 0, \\ Q_\alpha^{(\gamma)} - Q_\gamma^{(\alpha)} + R^{(\alpha)}P^{(\gamma)} = 0, \\ P_\gamma^{(\beta)} - P_\beta^{(\gamma)} + R^{(\beta)}Q^{(\gamma)} = 0, \end{array}\right.$$

et n'équivalent qu'à six distinctes, comme on peut s'en convaincre en différentiant chacune des trois dernières par la variable qui n'y figure pas extérieurement.

D'un autre côté, en ayant égard à (17), (18), on tire de (15)

$$\begin{aligned} l_{\beta\gamma} &= -mR_\gamma^{(\alpha)} - m_\gamma R^{(\alpha)} = mQ^{(\alpha)}P^{(\gamma)} + nP^{(\beta)}R^{(\alpha)}, \\ l_{\gamma\beta} &= nQ_\beta^{(\alpha)} + n_\beta Q^{(\alpha)} = nR^{(\alpha)}P^{(\beta)} + mQ^{(\alpha)}P^{(\gamma)}, \end{aligned}$$

de sorte que ces équations (15), comme on pouvait le prévoir, ne conduisent à aucune relation nouvelle entre les P, Q, R. Donc les seules relations non identiques que doivent vérifier ces dernières fonctions sont exprimées par les équations (16).

Actuellement les neuf cosinus $a, b, c, \ldots$ peuvent s'exprimer d'une infinité de manières au moyen de trois fonctions indépendantes. Si, par exemple, on prend les formules d'Euler (DUHAMEL, *Mécanique*, t. I, 2e édit., p. 267), qui donnent

$$\begin{aligned} P^{(t)} &= \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt}, \\ Q^{(t)} &= -\sin\varphi \frac{d\theta}{dt} + \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt}, \\ R^{(t)} &= \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned}$$

il résulte de ce qui vient d'être dit que la détermination des systèmes triplement orthogonaux peut se ramener : 1° à l'intégration des trois

équations

$$(19)\quad \frac{d\psi}{d\alpha}+\cot\varphi\frac{du}{d\alpha}=0,\quad \frac{d\psi}{d\beta}-\operatorname{tang}\varphi\frac{du}{d\beta}=0,\quad \frac{d\psi}{d\gamma}-\operatorname{Cot}u\frac{d\varphi}{d\gamma}=0,$$

où

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=e^{u},\quad \operatorname{Cot}u=\frac{\frac{1}{2}(e^{u}+e^{-u})}{\frac{1}{2}(e^{u}-e^{-u})};$$

2° à la détermination de l, m, n par les équations linéaires (15); 3° aux quadratures (c) (fin du § III).

Quant à l, m, n, qui doivent vérifier les équations (15), si l'on s'attache à l, par exemple, l'élimination de m, n montre que cette fonction doit satisfaire aux deux équations simultanées et compatibles

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2l}{d\alpha\,d\beta}-\dfrac{R^{(\alpha)}_{\alpha}}{R^{(\alpha)}}\dfrac{dl}{d\beta}+R^{(\alpha)}R^{(\beta)}l=0, \\[2ex] \dfrac{d^2l}{d\alpha\,d\gamma}-\dfrac{Q^{(\alpha)}_{\alpha}}{Q^{(\alpha)}}\dfrac{dl}{d\gamma}+Q^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}l=0. \end{cases}$$

l étant connu, les équations (15) donneront m et n sans autre intégration.

» Cette méthode, que je croyais nouvelle lors de l'envoi de la partie théorique du présent travail à l'Institut (juin 1864), avait été l'objet d'une communication antérieure de M. Bonnet (mars 1862). Ce géomètre avait fait la remarque que l'intégration des équations (19) peut se ramener à celle d'une équation unique du troisième ordre, que l'on obtient en éliminant u entre ces trois équations, et considérant ensuite φ comme une fonction de ψ, α, β. On peut obtenir une équation unique du troisième ordre par un choix un peu différent de variables. Si entre les trois (19) on élimine φ, ce qui donne

$$0=\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\psi}{d\beta}+\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{d\beta},\quad \frac{d\psi}{d\gamma}=-\operatorname{Cot}u\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\psi_\alpha}{u_\alpha}\right):\left(1+\frac{\psi_\alpha^2}{u_\alpha^2}\right),$$

et que l'on considère α, β comme des fonctions de u, ψ, γ prises pour les variables indépendantes, on trouve par les formules relatives au changement de variables que $\frac{d\alpha}{d\psi}$, $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{d\gamma}$ sont proportionnelles à des

expressions qui ne dépendent que de u et des dérivées de β relatives à ψ, u, γ jusqu'au second ordre inclusivement. En exprimant que ces quantités proportionnelles satisfont à la condition habituelle d'intégrabilité, on obtient l'équation du troisième ordre annoncée. Cette équation, d'une complication moyenne, peut remplacer celle de M. Bonnet, ou *vice versâ*, suivant les points de vue où l'on se place (*). «

Méthode de M. Lamé. — En vertu de (15) et de ce qui est dit sur le mouvement d'un point matériel (coordonnées curvilignes), les identités (17), (18) reviennent à celles de l'illustre auteur relatives aux courbures des arcs et à leurs variations; et, en éliminant les P, Q, R, on est ramené naturellement aux groupes *fondamentaux* [8], [9] des coordonnées curvilignes (p. 76, 78):

$$(17^*)\qquad \left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\gamma = \frac{l_\gamma}{n}\,\frac{n_\beta}{m},\ldots,$$

$$(18^*)\qquad \left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta + \left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha + \frac{l_\gamma}{n}\,\frac{m_\gamma}{n} = 0,\ \ldots$$

Les équations (7) deviennent ici

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{d\alpha} = b\mathrm{R}^{(\alpha)} - c\mathrm{Q}^{(\alpha)}, & \dfrac{da}{d\beta} = b\mathrm{R}^{(\beta)}, & \dfrac{da}{d\gamma} = -\,c\mathrm{Q}^{(\gamma)}, \\ \dfrac{db}{d\beta} = -a\mathrm{R}^{(\alpha)}, & \dfrac{db}{d\beta} = c\,\mathrm{P}^{(\beta)} - a\mathrm{R}^{(\beta)}, & \dfrac{db}{d\gamma} = c\mathrm{P}^{(\gamma)}, \\ \dfrac{dc}{d\alpha} = a\mathrm{Q}^{(\alpha)}, & \dfrac{dc}{d\beta} = -\,b\mathrm{P}^{(\beta)}, & \dfrac{dc}{d\gamma} = a\mathrm{Q}^{(\gamma)} - b\mathrm{P}^{(\gamma)}, \end{cases}$$

et, en y introduisant $\frac{1}{l}\frac{dx}{d\alpha}, \frac{1}{m}\frac{dx}{d\beta}, \frac{1}{n}\frac{dx}{d\gamma}$ au lieu de a, b, c respectivement, elles deviennent

$$(22)\qquad \frac{d^2x}{d\alpha\,d\beta} = \frac{l_\beta}{l}\,\frac{dx}{d\alpha} + \frac{m_\alpha}{m}\,\frac{dx}{d\beta},\ldots,$$

$$(22^*)\qquad \frac{d^2x}{d\alpha^2} = \frac{l_\alpha}{l}\,\frac{dx}{d\alpha} - \frac{ll_\beta}{m^2}\,\frac{dx}{d\beta} - \frac{ll_\gamma}{n^2}\,\frac{dx}{d\gamma},\ldots,$$

(*) Je marque de guillemets retournés toutes les parties introduites postérieurement à une rédaction que M. Hermite voulut bien accepter en mars 1865, et qui ne diffère de celle envoyée à l'Institut que par les considérations préliminaires sur les déterminants et l'adjonction des exemples des §§ VI et VIII.

c'est-à-dire les [28], [30] des *coordonnées curvilignes*. A quoi il faut joindre

$$(23) \qquad \frac{1}{l^2}\frac{dx^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{m^2}\frac{dx^2}{d\beta^2}+\frac{1}{n^2}\frac{dx^2}{d\gamma^2}=1.$$

Conformément à la méthode de M. Lamé, après avoir trouvé l, m, n au moyen des six équations (17^*), (18^*), on détermine x (et pareillement y, z) au moyen des trois (22) et de (23). Cette méthode étant loin de devoir être tout à fait abandonnée, soit que l'on prenne pour inconnues les rotations ou l, m, n [passage aisé au moyen de (15)], j'y joindrai les remarques suivantes : 1° une des trois (22) est une conséquence des deux autres et de (23), comme il est facile de s'en convaincre en tenant compte de (17^*) et de (18^*) ; 2° l'intégration des (22), (23) se ramène à celle d'équations (21), qu'on peut traiter successivement comme aux différentielles ordinaires, ainsi que cela a été développé plus généralement au § IV; 3° il résulte de la première méthode exposée dans ce paragraphe que les équations (22), (23) admettent trois solutions uniques et bien déterminées (en mettant de côté ce qui tient à une transformation de coordonnées rectangulaires) qu'il peut être plus aisé de trouver directement par la considération immédiate de (22), (23), ce qui arrive, en particulier, pour les systèmes isothermes.

§ VI. — *Exemple relatif au précédent paragraphe.*

Les formules d'Euler peuvent être remplacées par celles de M. O. Rodrigues

$$\Theta a = 1 + X^2 - Y^2 - Z^2, \quad \Theta b = 2(XY + Z), \quad \Theta c = 2(XZ - Y), \ldots,$$

$$\Theta P^{(t)} = 2\left(Z\frac{dY}{dt} - Y\frac{dZ}{dt} - \frac{dX}{dt}\right),$$

$$\Theta Q^{(t)} = 2\left(X\frac{dZ}{dt} - Z\frac{dX}{dt} - \frac{dY}{dt}\right),$$

$$\Theta R^{(t)} = 2\left(Y\frac{dX}{dt} - X\frac{dY}{dt} - \frac{dZ}{dt}\right),$$

où $\Theta = 1 + x^2 + y^2 + z^2$. Si, pour rétablir l'homogénéité, on pose

$$x = \frac{\xi}{H}, \quad y = \frac{\eta}{H}, \quad z = \frac{\zeta}{H};$$

les équations (16) pourront s'écrire

$$(19^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} H\frac{d\xi}{d\alpha} - \xi\frac{dH}{d\alpha} &= \zeta\frac{d\eta}{d\alpha} - \eta\frac{d\zeta}{d\alpha}, \\ H\frac{d\eta}{d\beta} - \eta\frac{dH}{d\beta} &= \xi\frac{d\zeta}{d\beta} - \zeta\frac{d\xi}{d\beta}, \\ H\frac{d\zeta}{d\gamma} - \zeta\frac{dH}{d\gamma} &= \eta\frac{d\xi}{d\gamma} - \xi\frac{d\eta}{d\gamma}. \end{aligned} \right.$$

» On peut disposer du dénominateur arbitraire H de façon à remplir quelque condition particulière. Si l'on fait par exemple la triple supposition que ξ ne contient point α, η point β, ζ point γ, ce qui fait disparaître les termes extrêmes de gauche, l'élimination de H entre les équations réduites donne les trois

$$\begin{aligned} -w_{\alpha\beta} &= (w_\alpha - v_\alpha)(w_\beta - u_\beta), \\ -v_{\alpha\gamma} &= (v_\alpha - w_\alpha)(v_\gamma - u_\gamma), \\ -u_{\beta\gamma} &= (u_\beta - w_\beta)(u_\gamma - v_\gamma), \end{aligned}$$

où l'on a fait $u = \log\xi$, $v = \log\eta$, $w = \log\zeta$, et qui n'introduisent aucune condition nouvelle, comme on le reconnaît en les différentiant par γ, β, α respectivement. On tire, par exemple, de la première

$$\left(\frac{w_{\alpha\beta}}{v_\alpha - w_\alpha}\right)_\alpha = w_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{w_{\alpha\alpha\beta}}{w_{\alpha\beta}} = v_\alpha - w_\alpha + \frac{v_{\alpha\alpha} - w_{\alpha\alpha}}{v_\alpha - w_\alpha}.$$

En différentiant par β et ayant égard à cette même équation, on en conclut

$$(\log\varpi)_{\alpha\beta} = -2\varpi, \quad \text{où} \quad \varpi = w_{\alpha\beta}.$$

De là, d'après M. Liouville,

$$\varpi = \frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{(\mathcal{A} - \mathcal{B})^2}.$$

Il en résulte

$$\zeta = \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1(\mathcal{A} - \mathcal{B}),\quad \eta = \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1(\mathcal{C} - \mathcal{A}),\quad \xi = \mathcal{B}_1\mathcal{C}_1(\mathcal{B} - \mathcal{C}),$$
$$\mathrm{H} = k - \int \mathcal{A}_1^2 \mathcal{A}'\, d\alpha - \int \mathcal{B}_1^2 \mathcal{B}'\, d\beta - \int \mathcal{C}_1^2 \mathcal{C}'\, d\gamma;$$

k est une constante arbitraire, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ des fonctions arbitraires de α, β, γ respectivement, et les accents marquent les dérivées. De ces six fonctions arbitraires trois peuvent être prises pour α, β, γ. «

En supposant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ constantes, on a la solution très-particulière

$$x = \beta\gamma,\quad y = \alpha\gamma,\quad z = \alpha\beta,$$

qui donne

$$\Theta \mathrm{P}^{(\beta)} = -2\gamma(\alpha^2+1),\quad \Theta \mathrm{Q}^{(\alpha)} = 2\gamma(\beta^2-1),\quad \Theta \mathrm{R}^{(\alpha)} = -2\beta(\gamma^2+1),$$
$$\Theta \mathrm{P}^{(\gamma)} = 2\beta(\alpha^2-1),\quad \Theta \mathrm{Q}^{(\gamma)} = -2\alpha(\beta^2+1),\quad \Theta \mathrm{R}^{(\beta)} = 2\alpha(\gamma^2-1),$$

où

$$\Theta = 1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2.$$

Les équations (15) fournissent généralement les trois combinaisons $\mathrm{P}^{(\gamma)}\dfrac{dl}{d\beta} + \mathrm{R}^{(\alpha)}\dfrac{dn}{d\beta} = 0, \ldots,$ lesquelles deviennent ici, par la suppression d'un facteur commun, immédiatement intégrables, et d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}
(\beta^2+1)m - (\gamma^2-1)n &= \varphi(\beta,\gamma),\\
(\gamma^2+1)n - (\alpha^2-1)l &= \psi(\alpha,\gamma),\\
(\alpha^2+1)l - (\beta^2-1)m &= \chi(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Tirant de là les valeurs de l, m, n et substituant dans les (15), on obtient

$$(\alpha^2-1)\frac{d\chi}{d\alpha} + (\alpha^2+1)\frac{d\psi}{d\alpha} = 0,$$
$$(\beta^2-1)\frac{d\varphi}{d\beta} + (\beta^2+1)\frac{d\chi}{d\beta} = 0,$$
$$(\gamma^2-1)\frac{d\psi}{d\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{d\varphi}{d\gamma} = 0,$$

d'où, par la différentiation immédiate,

$$\frac{d^2\chi}{d\alpha\, d\beta} = 0,\quad \frac{d^2\psi}{d\alpha\, d\gamma} = 0,\quad \frac{d^2\varphi}{d\beta\, d\gamma} = 0.$$

Intégrant et substituant dans les équations précédentes, on en conclura les expressions définitives de φ, ψ, χ, et par suite

$$\Theta l = \frac{\Theta^2}{2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\lambda(\alpha)}{\Theta}\right) + (\gamma^2+1)\mu(\beta) + (\beta^2-1)\nu(\gamma),$$
$$\Theta m = \frac{\Theta^2}{2\beta}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\mu(\beta)}{\Theta^2}\right) + (\alpha^2+1)\nu(\gamma) + (\gamma^2-1)\lambda(\alpha),$$
$$\Theta n = \frac{\Theta^2}{2\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\nu(\gamma)}{\Theta^2}\right) + (\beta^2+1)\lambda(\alpha) + (\alpha^2-1)\mu(\beta),$$

λ, μ, ν étant trois fonctions arbitraires. Les cosinus a, b,... étant d'ailleurs exprimés en α, β, γ, on aura, par l'intégration de différentielles exactes,

$$x = \frac{\alpha}{\Theta}\left[(\gamma^2+1)\mu(\beta) + (\beta^2-1)\nu(\gamma) - (\gamma^2+\beta^2)\lambda(\alpha)\right] + \int \frac{\lambda'(\alpha)}{2\alpha}\,d\alpha,$$
$$y = \frac{\beta}{\Theta}\left[(\alpha^2+1)\nu(\gamma) + (\gamma^2-1)\lambda(\alpha) - (\alpha^2+\gamma^2)\mu(\beta)\right] + \int \frac{\mu'(\beta)}{2\beta}\,d\beta,$$
$$z = \frac{\gamma}{\Theta}\left[(\beta^2+1)\lambda(\alpha) + (\alpha^2-1)\mu(\beta) - (\alpha^2+\beta^2)\nu(\gamma)\right] + \int \frac{\nu'(\gamma)}{2\gamma}\,d\gamma.$$

Par exemple, si l'on prend pour λ, μ, ν des fonctions linéaires de α^2, β^2, γ^2 respectivement, on conclura facilement des équations obtenues les combinaisons suivantes :

$$\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)y - \left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)z = g,$$
$$\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)z - \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)x = h,$$
$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x - \left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)y = k,$$

et par suite

$$\pm\sqrt{\left[\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x-k\right]^2+4y^2} \pm \sqrt{\left[\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)x+h\right]^2-4z^2} = g,$$
$$\pm\sqrt{\left[\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)y-g\right]^2+4z^2} \pm \sqrt{\left[\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)y+k\right]^2-4x^2} = h,$$
$$\pm\sqrt{\left[\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)z-h\right]^2+4x^2} \pm \sqrt{\left[\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)z+g\right]^2-4y^2} = k,$$

g, h, k étant des constantes. La première de ces surfaces orthogonales se réduit à une famille de sphères si $g = 0$. Si, en même temps, $h = 0$, la seconde se transforme aussi en famille sphérique, la troisième restant toujours du quatrième ordre.

» Cet exemple présente cette circonstance que l, m, n renferment trois fonctions arbitraires d'une variable différente et leurs dérivées premières. Il m'a paru au moins curieux de savoir si d'autres systèmes orthogonaux ne jouiraient pas de la même propriété. Par l'emploi des coefficients indéterminés, on reconnait, en ayant égard à (15), (17), (18), que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

$$\frac{R^{(\beta)}}{Q^{(\gamma)}} = a, \quad \frac{P^{(\gamma)}}{R^{(\alpha)}} = b, \quad \frac{Q^{(\alpha)}}{P^{(\beta)}} = c,$$

a, b, c étant trois fonctions arbitraires qui manquent de α, β, γ respectivement.

Ces relations donnent, en ayant égard à (17) dans l'intervalle des transformations,

$$\left(\frac{R^{(\alpha)}_{\beta}}{R^{(\alpha)}}\right)_{\alpha} = \left(\frac{P^{(\gamma)}_{\alpha}}{P^{(\gamma)}}\right)_{\beta} = \left(\frac{R^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}}{P^{(\gamma)}}\right)_{\beta} = -R^{(\alpha)}R^{(\beta)}, \ldots$$

On forme ainsi le triple groupe

$$(\alpha)\ \begin{cases} -R^{(\alpha)}R^{(\beta)} = (\log R^{(\alpha)})_{\alpha\beta} = (\log R^{(\beta)})_{\alpha\beta} = (\log P^{(\gamma)})_{\alpha\beta} = (\log Q^{(\gamma)})_{\alpha\beta}, \\ -Q^{(\alpha)}Q^{(\gamma)} = (\log Q^{(\gamma)})_{\alpha\gamma} = \ldots, \\ -P^{(\beta)}P^{(\gamma)} = (\log P^{(\beta)})_{\beta\gamma} = \ldots. \end{cases}$$

De la comparaison des membres logarithmiques on conclut, avec un peu d'attention, que l'on peut adopter, sous la forme la plus générale possible,

$$(\alpha')\ P^{(\beta)} = \theta C,\ P^{(\gamma)} = \theta B',\ Q^{(\gamma)} = \theta A,\ Q^{(\alpha)} = \theta C';\ R^{(\alpha)} = \theta B,\ R^{(\beta)} = \theta A',$$

θ étant une fonction tout à fait indéterminée, et A, A',... des fonctions arbitraires de l'espèce a, b, c.

Maintenant les (17), (18) fournissent généralement les combinaisons visibles

$$(\beta)\qquad P^{(\gamma)}R^{(\beta)}_{\alpha}-R^{(\beta)}P^{(\gamma)}_{\alpha}+R^{(\alpha)}P^{(\gamma)}_{\beta}-P^{(\gamma)}R^{(\alpha)}_{\beta}+P^{(\beta)}R^{(\alpha)}_{\gamma}-R^{(\alpha)}P^{(\beta)}_{\gamma}=0,$$

et deux autres analogues,

$$(\gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} & P^{(\beta)}P^{(\gamma)}_{\alpha}-P^{(\gamma)}P^{(\beta)}_{\alpha}=Q^{(\gamma)}Q^{(\alpha)}_{\beta}-Q^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}_{\beta} \\ & \quad =R^{(\alpha)}R^{(\beta)}_{\gamma}-R^{(\beta)}R^{(\alpha)}_{\gamma}=P^{(\beta)}Q^{(\gamma)}R^{(\alpha)}+P^{(\gamma)}Q^{(\alpha)}R^{(\beta)}, \end{aligned}\right.$$

qui, abstraction faite du dernier membre de (γ), présentent cette propriété de rester absolument les mêmes lorsque les lettres qui y figurent sont multipliées par un même facteur quelconque.

La substitution, dans (β), des valeurs précédentes de $P^{(\beta)}$, $P^{(\gamma)}, \ldots$, fournit

$$\frac{A'_{\gamma}}{A_{\beta}}=\frac{B}{C'},\quad \frac{B'_{\alpha}}{B_{\gamma}}=\frac{C}{A'},\quad \frac{C'_{\beta}}{C_{\alpha}}=\frac{A}{B'},$$

d'où, en différentiant par α, β, γ respectivement, on conclut ces formes plus circonscrites

$$\begin{aligned} A&=\mathcal{C}_2\mathcal{B}, & B&=\mathcal{A}_2\mathcal{C}, & C&=\mathcal{B}_2\mathcal{A}, \\ B'&=\mathcal{C}_2\mathcal{A}_1, & C'&=\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1, & A'&=\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1, \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ étant des fonctions arbitraires de α seul, etc.; mais la vérification complète des équations non différentiées exige que

$$\frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\frac{\mathcal{C}'_1}{\mathcal{C}\mathcal{C}_2}=g,\quad \frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}=\frac{\mathcal{A}'_1}{\mathcal{A}\mathcal{A}_2}=h,\quad \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}=\frac{\mathcal{B}'_1}{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}=k,$$

g, h, k étant des constantes qu'on peut évidemment supposer égales à l'unité. Ces équations fournissent $\mathcal{A}\mathcal{A}'-\mathcal{A}_1\mathcal{A}'_1=0, \ldots$. Les trois constantes qu'introduisait l'intégration de ces dernières doivent être égales pour la coïncideuce des trois valeurs de θ déduites de (γ). D'après cela, il est visible qu'on peut prendre

$$\mathcal{A}=\alpha+\frac{1}{\alpha},\quad \mathcal{A}_1=-\alpha+\frac{1}{\alpha},\quad \mathcal{A}_2=-\frac{1}{\alpha},\ldots,$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{2\alpha\beta\gamma}{1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}.$$

On retombe ainsi sur l'exemple précédent.

Si des expressions de x, y, z relatives à cet exemple, considérées deux à deux, on élimine les fonctions arbitraires dont la dérivée manque, on reconnait que toutes les lignes de courbure des surfaces orthogonales sont planes. Si l'on voulait chercher, en partant des équations aux rotations (17), (18), tous les pareils systèmes, on aurait d'abord, pour exprimer que toutes les lignes de courbure sont planes,

$$\frac{R^{(\alpha)}}{Q^{(\alpha)}} = a, \quad \frac{P^{(\beta)}}{R^{(\beta)}} = b, \quad \frac{Q^{(\gamma)}}{P^{(\gamma)}} = c \quad (\textit{voir } \text{le § IX});$$

on trouverait deux groupes analogues à (α) et (α'), sauf qu'il faut échanger les indices supérieurs de $P^{(\beta)}$, $P^{(\gamma)}$;.... Alors il faut commencer de particulariser les fonctions arbitraires A, A',..., autant que possible, au moyen des deux premières (γ). Par la considération d'équations linéaires du troisième ordre et aux différentielles ordinaires, on obtient des formes comparativement très-réduites pour les A, A',.... On continue de les circonscrire par le groupe (β); mais je supprime cette analyse, qui exige des détails un peu minutieux.

§ VII. — *Système triplement orthogonal et isotherme.*

Plusieurs éminents géomètres ont cherché à simplifier, par des considérations empruntées principalement à la Géométrie infinitésimale, la méthode au moyen de laquelle l'illustre auteur des *Coordonnées curvilignes* a montré que le système ellipsoïdal était le seul triplement orthogonal et isotherme. L'importance du sujet me détermine à indiquer quelques modifications qui me paraissent donner à cette méthode toute la rigueur et la simplicité analytique que l'on peut désirer.

La condition d'isothermie donnant (*Coordonnées curvilignes*, p. 95)

$$l = BC, \quad m = AC, \quad n = AB,$$

A, B, C étant des fonctions arbitraires qui manquent de α, β, γ respectivement, les relations (17^*) deviennent

$$A = \frac{B}{B_\gamma} A_\gamma + \frac{C}{C_\gamma} A_\beta, \quad B = \frac{A}{A_\gamma} B_\gamma + \frac{C}{C_\alpha} A_\alpha, \quad C = \frac{A}{A_\beta} C_\beta + \frac{B}{B_\alpha} C_\alpha,$$

les variables placées en indices indiquant toujours les dérivations partielles relatives à ces variables.

De la première on déduit, en différentiant deux fois par α,

$$o = \left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_\alpha A_\gamma + \left(\frac{C}{C_\beta}\right)_\alpha A_\beta, \quad o = \left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_{\alpha\alpha} A_\gamma + \left(\frac{C}{C_\beta}\right)_{\alpha\alpha} A_\beta,$$

d'où, en excluant tout à fait l'hypothèse de A_β ou A_γ nul,

$$\frac{\left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_{\alpha\alpha}}{\left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_\alpha} = \frac{\left(\frac{C}{C_\beta}\right)_{\alpha\alpha}}{\left(\frac{C}{C_\beta}\right)_\alpha} = \frac{d \log \chi'(\alpha)}{d\alpha},$$

les deux premiers rapports devant être respectivement indépendants de β et de γ. De là

$$\frac{B}{B_\gamma} = f(\gamma)\chi(\alpha) + f_1(\gamma), \quad \frac{C}{C_\beta} = \mathrm{f}(\beta)\chi(\alpha) + \mathrm{f}_1(\beta),$$

les f et χ étant des fonctions arbitraires. Il en résulte, en remontant,

$$o = A_\gamma f(\gamma) + A_\beta \mathrm{f}(\beta), \quad A = A_\gamma f_1(\gamma) + A_\beta \mathrm{f}_1(\beta).$$

La première, en posant

$$\int \frac{d\gamma}{f(\gamma)} = \varpi(\gamma), \quad \int \frac{d\beta}{\mathrm{f}(\beta)} = \omega(\beta), \quad \varpi - \omega = v,$$

et désignant par Φ une fonction arbitraire, donne

$$A = \Phi(v), \quad A_\gamma = \Phi'(v)\varpi'(\gamma), \quad A_\beta = -\Phi'(v)\omega'(\beta).$$

Donc, en vertu de la seconde,

$$\Psi(v) = \frac{\Phi}{\Phi'} = \varpi'(\gamma) f_1(\gamma) - \omega'(\beta)\mathrm{f}_1(\beta),$$

et, en différentiant tour à tour par γ et β,

$$\Psi'(\mathrm{v})\varpi'(\gamma) = [\varpi'(\gamma)f_1(\gamma)]', \quad \Psi'(\mathrm{v})\omega'(\beta) = [\omega'(\beta)\mathrm{f}_1(\beta)]'.$$

Par suite,

$$\Psi'(\mathrm{v}) = \frac{[\varpi'(\gamma)f_1(\gamma)]'}{\varpi'(\gamma)} = \frac{[\omega'(\beta)\mathrm{f}_1(\beta)]'}{\omega'(\beta)} = \frac{1}{k},$$

$$\Psi = \frac{\mathrm{v}}{k} + \mathrm{K}, \quad \Phi = h(\mathrm{v} + \mathrm{H})^k,$$

k, K, h, H étant des constantes arbitraires. La forme nécessaire de A étant reconnue, et par suite aussi celle de B, C, la vérification simultanée de (17*) donne sous la forme la plus générale possible

$$\mathrm{A}^2 = g(\mathcal{B} - \mathcal{C})^p, \quad \mathrm{B}^2 = g_1(\mathcal{C} - \mathcal{A})^p, \quad \mathrm{C}^2 = g_2(\mathcal{A} - \mathcal{B})^p,$$

où g, g_1, g_2, p sont des constantes quelconques. Il y a une deuxième forme, exponentielle, qui correspond à k infini, mais on reconnaîtra sans peine qu'elle ne peut vérifier les (18*).

D'après ces valeurs, la première (18*) devient

$$(\mathcal{A})\quad \begin{cases} 2(\mathcal{B} - \mathcal{C})^p g\,\mathcal{A}'' - 2(\mathcal{C} - \mathcal{A})^p g_1\,\mathcal{B}'' = \left(\dfrac{2}{\mathcal{A} - \mathcal{B}} - \dfrac{p}{\mathcal{C} - \mathcal{A}}\right)(\mathcal{B} - \mathcal{C})^p g\,\mathcal{A}'^2 \\ \quad + \left(\dfrac{2}{\mathcal{A} - \mathcal{B}} - \dfrac{p}{\mathcal{B} - \mathcal{C}}\right)(\mathcal{C} - \mathcal{A})^p g_1\,\mathcal{B}'^2 + \dfrac{p(\mathcal{A} - \mathcal{B})}{(\mathcal{B} - \mathcal{C})(\mathcal{C} - \mathcal{A})}(\mathcal{A} - \mathcal{B})^p g_2\,\mathcal{C}'^2; \end{cases}$$

si on l'ajoute aux deux autres, obtenues par une permutation circulaire des lettres, il vient

$$(\mathcal{B})\quad (p-1)[(\mathcal{B} - \mathcal{C})^{p+2} g\,\mathcal{A}'^2 + (\mathcal{C} - \mathcal{A})^{p+2} g_1\,\mathcal{B}'^2 + (\mathcal{A} - \mathcal{B})^{p+2} g_2\,\mathcal{C}'^2] = 0.$$

L'hypothèse du second facteur nul, lorsqu'on pose

$$g\,\mathcal{A}'^2 = \mathrm{u}, \quad g_1\,\mathcal{B}'^2 = \mathrm{v}, \quad g_2\,\mathcal{C}'^2 = \mathrm{w},$$

et que l'on prend $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ pour les variables indépendantes, donne, par deux différentiations relatives à $\mathcal{A}$,

$$(\mathcal{B} - \mathcal{C})^{p+2}\mathrm{u} + (\mathcal{C} - \mathcal{A})^{p+2}\mathrm{v} + (\mathcal{A} - \mathcal{B})^{p+2}\mathrm{w} = 0,$$

$$(\mathcal{B} - \mathcal{C})^{p+2}\frac{d\mathrm{u}}{d\mathcal{A}} - (p+2)(\mathcal{C} - \mathcal{A})^{p+1}\mathrm{v} + (p+2)(\mathcal{A} - \mathcal{B})^{p+1}\mathrm{w} = 0,$$

$$(\mathcal{B} - \mathcal{C})^{p+2}\frac{d^2\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^2} + (p+2)(p+1)(\mathcal{C} - \mathcal{A})^p\mathrm{v} + (p+2)(p+1)(\mathcal{A} - \mathcal{B})^p\mathrm{w} = 0.$$

Si l'on suppose $p = -2$, la première de ces équations fournit pour u, v, w des valeurs constantes qui vérifient les équations ($\mathcal{A}$), mais correspondent à un système isotherme imaginaire, qu'on peut en conséquence rejeter. On reconnaît d'un autre côté que la supposition $p = -1$, qui donnerait $\frac{d^2 u}{d\mathcal{A}^2} = 0$, ne peut s'accorder avec ($\mathcal{A}$). $(p+1)$ et $(p+2)$ étant différents de zéro, l'élimination de v, w entre les trois équations précédentes donne une équation du second ordre en u qui conduit à la valeur inadmissible $u = 0$. L'équation ($\mathcal{B}$) exige donc forcément que l'on prenne $p = 1$. En se rappelant que

$$g\mathcal{A}'^2 = u, \quad 2g\mathcal{A}'\mathcal{A}'' = \frac{du}{d\alpha}, \quad \text{d'où} \quad 2g\mathcal{A}'' = \frac{du}{d\mathcal{A}},$$

l'équation ($\mathcal{A}$) devient alors

$$(\mathcal{B}-\mathcal{C})\frac{du}{d\mathcal{A}} - (\mathcal{C}-\mathcal{A})\frac{dv}{d\mathcal{B}} = \left(\frac{2}{\mathcal{A}-\mathcal{B}} - \frac{1}{\mathcal{C}-\mathcal{A}}\right)(\mathcal{B}-\mathcal{C})u$$
$$+ \left(\frac{2}{\mathcal{A}-\mathcal{B}} - \frac{1}{\mathcal{B}-\mathcal{C}}\right)(\mathcal{C}-\mathcal{A})v + \frac{(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2}{(\mathcal{B}-\mathcal{C})(\mathcal{C}-\mathcal{A})}w.$$

Isolant w et différentiant trois fois de suite par $\mathcal{A}$, on obtient, après la suppression du facteur $(\mathcal{B}-\mathcal{C})$, que la première différentiation introduit,

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\frac{d^2u}{d\mathcal{A}^2} - 4(\mathcal{A}-\mathcal{B})\frac{du}{d\mathcal{A}} + 6u = 2(\mathcal{A}-\mathcal{B})\frac{dv}{d\mathcal{B}} + 6v,$$

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\frac{d^3u}{d\mathcal{A}^3} - 2(\mathcal{A}-\mathcal{B})\frac{d^2u}{d\mathcal{A}^2} + 2\frac{du}{d\mathcal{A}} = 2\frac{dv}{d\mathcal{B}},$$

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\frac{d^4u}{d\mathcal{A}^4} = 0.$$

Donc λ, λ_1, λ_2 étant des constantes arbitraires, on aura, en remontant ou par symétrie,

$$u = \mathcal{A}^3 + \lambda\mathcal{A}^2 + \lambda_1\mathcal{A} + \lambda_2,$$
$$v = \mathcal{B}^3 + \lambda\mathcal{B}^2 + \lambda_1\mathcal{B} + \lambda_2,$$
$$w = \mathcal{C}^3 + \lambda\mathcal{C}^2 + \lambda_1\mathcal{C} + \lambda_2,$$

et par suite, U, V, W ayant ces valeurs,

$$d\alpha = \frac{d\mathcal{A}}{\sqrt{\frac{U}{g}}}, \quad d\beta = \frac{d\mathcal{B}}{\sqrt{\frac{V}{g_1}}}, \quad d\gamma = \frac{d\mathcal{C}}{\sqrt{\frac{W}{g_2}}}.$$

Quant à la détermination finale de x, y, z, il n'y a rien à substituer au calcul de M. Lamé.

§ VIII. — *Système orthogonal déduit du système elliptique.*

Lorsqu'on connaît un système orthogonal particulier, on peut en déduire les cosinus $a, b, c, \ldots$ et les $P^{(\beta)}, P^{(\gamma)}, \ldots$ en α, β, γ. Si l'on substitue ces valeurs particulières des P, Q, R dans les équations (15), et qu'on intègre ces dernières équations en prenant l, m, n pour inconnues, on obtiendra les expressions de ces inconnues avec trois fonctions arbitraires généralement. Puis, en conservant les valeurs particulières des $a, b, c, \ldots$ on aura les x, y, z par des quadratures. Voici un exemple propre à montrer l'importance de cette remarque. En posant

$$G = \frac{-4}{(h-k)(k-j)(j-h)},$$

h, k, j étant des constantes, les formules relatives au système elliptique peuvent s'écrire, en supposant $\alpha > \beta > \gamma$,

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{G(k-j)(\alpha-h)(\beta-h)(\gamma-h)},\\ y_1 &= \sqrt{G(j-h)(\alpha-k)(\beta-k)(\gamma-k)},\\ z_1 &= \sqrt{G(h-k)(\alpha-j)(\beta-j)(\gamma-j)},\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\\ m_1 &= \sqrt{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\\ n_1 &= \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs correspondantes des P, Q, R seront, d'après (15),

$$R^{(\alpha)} = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}, \qquad R^{(\beta)} = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}, \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans les mêmes équations (15), (20), où l'on regarde actuellement l, m, n comme trois fonctions inconnues, les (20)

donneront, pour déterminer l,

$$\frac{d^2 l}{d\alpha d\beta} + \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{dl}{d\beta} + \frac{l}{4(\alpha-\beta)^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 l}{d\alpha d\gamma} + \frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{dl}{d\gamma} + \frac{l}{4(\alpha-\gamma)^2} = 0.$$

Si l'on pose $l = l_1 u$, et ultérieurement $m = m_1 v$, $n = n_1 w$, les deux équations précédentes deviendront, en observant que l_1 est une de leurs solutions communes,

$$2(\alpha-\beta)\frac{d^2 u}{d\alpha d\beta} + 3\frac{du}{d\beta} - \frac{du}{d\alpha} = 0,$$
$$2(\alpha-\gamma)\frac{d^2 u}{d\alpha d\gamma} + 3\frac{du}{d\gamma} - \frac{du}{d\alpha} = 0.$$

Ces équations admettent la solution simple

$$\frac{T}{(\alpha-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

T, t étant des constantes quelconques. Les équations (15) fournissent les valeurs simples et correspondantes de v, w, et l'on a la solution très-générale

$$u = \Sigma\frac{T}{(\alpha-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$
$$v = \Sigma\frac{T}{(\beta-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$
$$w = \Sigma\frac{T}{(\gamma-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

le Σ s'étendant à toutes les valeurs qu'on voudra de T, t. Pour trouver x, y, z on prendra

$$a = \frac{1}{l_1}\frac{dx_1}{d\alpha} = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{G(k-j)(\beta-h)(\gamma-h)}{(\alpha-h)}}, \quad b = \ldots,$$

et par l'intégration des différentielles exactes (c), § III, on trouvera

$$x = \sqrt{G(k-j)(\alpha-h)(\beta-h)(\gamma-h)}\,\Sigma\frac{T}{(h-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

$$y = \sqrt{G(j-h)(\alpha-k)(\beta-k)(\gamma-k)}\,\Sigma\,\frac{T}{(k-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

$$z = \sqrt{G(h-k)(\alpha-j)(\beta-j)(\gamma-j)}\,\Sigma\,\frac{T}{(j-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}}.$$

Les systèmes, en nombre infini, compris dans ces formules, ont évidemment la même image sphérique que le système elliptique.

§ IX. — *Des surfaces applicables.*

J'introduis ce dernier paragraphe pour rattacher à la théorie générale des coordonnées curvilignes la théorie partielle de la déformation des surfaces, qu'il est impossible de déduire des formules de M. Lamé. Si dans les équations (15), § V, on introduit l'hypothèse $n = 0$, elles deviennent $l_\gamma = 0$, $m_\gamma = 0$, $P^{(\gamma)} = 0$, $Q^{(\gamma)} = 0$, $R^{(\gamma)} = 0$, et

$$(24)\qquad R^{(\alpha)} = -\frac{l_\beta}{m},\quad R^{(\beta)} = \frac{m_\alpha}{l},\quad m P^{(\alpha)} + l Q^{(\beta)} = 0.$$

On ne peut plus faire usage des relations (17), (18) ou (17'), (18'), établies sous la condition expresse de $P^{(\alpha)}$, $Q^{(\beta)}$, $R^{(\gamma)}$ égaux à zéro. Mais en revenant aux identités (8), où cette supposition n'a pas été introduite, et où l'on fera $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, on aura ici, en ayant égard à (24),

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &Q^{(\alpha)}P^{(\beta)} - P^{(\alpha)}Q^{(\beta)} = \left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta + \left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha,\\ &Q^{(\alpha)}_\beta - Q^{(\beta)}_\alpha + \frac{m_\alpha}{l}P^{(\alpha)} + \frac{l_\beta}{m}P^{(\beta)} = 0,\\ &P^{(\alpha)}_\beta - P^{(\beta)}_\alpha - \frac{l_\beta}{m}Q^{(\beta)} - \frac{m_\alpha}{l}Q^{(\alpha)} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (24), (25) correspondent au problème de l'*application* des surfaces quand l et m sont donnés en α, β. Dans le cas particulier de $l = 1$, on retombe, en éliminant $Q^{(\beta)}$, sur les équations *fondamentales* de M. Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier).

Lorsqu'on aura tiré de ces équations les valeurs de $P^{(\alpha)}$, $P^{(\beta)}$, $Q^{(\alpha)}$, $Q^{(\beta)}$,

on obtiendra les cosinus par l'intégration des équations (7), qui sont ici

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{da}{d\alpha} = -b\dfrac{l_\beta}{m} - c\mathrm{Q}^{(\alpha)}, & \dfrac{da}{d\beta} = b\dfrac{m_\alpha}{l} - c\mathrm{Q}^{(\beta)}, \\ \dfrac{db}{d\alpha} = c\mathrm{P}^{(\alpha)} + a\dfrac{l_\beta}{m}, & \dfrac{db}{d\beta} = c\mathrm{P}^{(\beta)} - a\dfrac{m_\alpha}{l}, \\ \dfrac{dc}{d\alpha} = a\mathrm{Q}^{(\alpha)} - b\mathrm{P}^{(\alpha)}, & \dfrac{dc}{d\beta} = a\mathrm{Q}^{(\beta)} - b\mathrm{P}^{(\beta)}, \end{array}\right.$$

et qui ont été considérées plus généralement au § IV. On aura ensuite x, y, z par les équations (c), § III.

Si l'on veut se débarrasser de toute espèce d'auxiliaires et déterminer *directement* x, par exemple, il n'y aura qu'à éliminer $\mathrm{P}^{(\alpha)}$, $\mathrm{P}^{(\beta)}$, $\mathrm{Q}^{(\alpha)}$, $\mathrm{Q}^{(\beta)}$ entre (26) et la première (25). On obtiendra ainsi

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} c^2\left[\left(\dfrac{l_\beta}{m}\right)_\beta + \left(\dfrac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha\right] + \dfrac{da}{d\alpha}\dfrac{db}{d\beta} - \dfrac{da}{d\beta}\dfrac{db}{d\alpha} \\ \quad + \dfrac{m_\alpha}{l}\left(a\dfrac{da}{d\alpha} + b\dfrac{db}{d\alpha}\right) + \dfrac{l_\beta}{m}\left(a\dfrac{da}{d\beta} + b\dfrac{db}{d\beta}\right) = 0, \end{array}\right.$$

où l'on remplacera c^2 par $1 - a^2 - b^2$, a et b par $\frac{1}{l}\frac{dx}{d\alpha}$ et $\frac{1}{m}\frac{dx}{d\beta}$, ce qui fournit l'équation du second ordre que doit vérifier une quelconque des coordonnées x, y, z.

Un autre mode de solution résulte de l'emploi des formules d'Euler, lesquelles transforment (24) dans

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} + \cos\theta\frac{d\psi}{d\alpha} = -\frac{l_\beta}{m},$$

$$\frac{d\varphi}{d\beta} + \cos\theta\frac{d\psi}{d\beta} = \frac{m_\alpha}{l},$$

$$m\left(\cos\varphi\frac{d\theta}{d\alpha} + \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{d\alpha}\right) = l\left(\sin\varphi\frac{d\theta}{d\beta} - \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{d\beta}\right).$$

Les équations (25) sont alors de simples identités. Lorsque φ, ψ, θ ont été déterminées en α, β par ces trois équations, les formules d'Euler

donnent tout de suite les cosinus, et les quadratures (c), § III, fournissent enfin x, y, z (*).

» Des équations des lignes de courbure d'une quelconque des surfaces considérées, savoir

$$\begin{gathered}(l+\Theta Q^{(\alpha)})d\alpha+\Theta Q^{(\beta)}d\beta=0,\\ (m-\Theta P^{(\beta)})d\beta-\Theta P^{(\alpha)}d\alpha=0,\end{gathered}$$

d'où

$$(P^{(\alpha)}Q^{(\beta)}-P^{(\beta)}Q^{(\alpha)})\Theta^2+(mQ^{(\alpha)}-lP^{(\beta)})\Theta+ml=0.$$

On conclut, en comparant avec la première (25), que le produit des inverses des rayons principaux de courbure est

$$\frac{1}{ml}\left[\left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta+\left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha\right].$$

En désignant par $\omega^{(\alpha)}d\alpha$, $\upsilon^{(\alpha)}d\alpha$, $\varepsilon^{(\alpha)}$ les angles de contingence, de torsion, et l'inclinaison, sur le plan tangent, de la courbe $\beta=\text{const.}$, en appelant $\omega^{(\beta)}d\beta$, $\upsilon^{(\beta)}d\beta$, $\varepsilon^{(\beta)}$ les quantités analogues pour la courbe $\alpha=\text{const.}$ ($\varepsilon^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\beta)}$ sont comptés à partir du plan osculateur correspondant, en supposant que celui-ci tourne autour de la tangente dans le sens direct) il est facile de voir géométriquement ou analytiquement que

$$\begin{aligned}P^{(\alpha)}&=\upsilon^{(\alpha)}+\varepsilon^{(\alpha)}_\alpha, & P^{(\beta)}&=\omega^{(\beta)}\sin\varepsilon^{(\beta)},\\ Q^{(\alpha)}&=\omega^{(\alpha)}\sin\varepsilon^{(\alpha)}, & Q^{(\beta)}&=\upsilon^{(\beta)}+\varepsilon^{(\beta)}_\beta,\\ R^{(\alpha)}&=\omega^{(\alpha)}\cos\varepsilon^{(\alpha)}, & R^{(\beta)}&=\omega^{(\beta)}\cos\varepsilon^{(\beta)}.\end{aligned}$$

Lorsque, pour une surface individuelle, $\alpha=\text{const.}$, $\beta=\text{const.}$ correspondent aux lignes de courbure, il résulte des équations ci-dessus, relatives à ces lignes, $P^{(\alpha)}=0$, $Q^{(\beta)}=0$. Dans ce cas $\upsilon^{(\alpha)}+\varepsilon^{(\alpha)}_\alpha=0$, de façon que, si la ligne est plane, le rapport $\dfrac{R^{(\alpha)}}{Q^{(\alpha)}}$ ne dépend point de α.

(*) J'ai appris que les résultats ci-dessus avaient été établis par M. Codani, mais je ne sais à quelle époque précise.

Remarque finale. — S'il s'agissait d'établir le plus simplement possible les diverses formules relatives, soit aux surfaces applicables, soit aux systèmes triplement orthogonaux, il suffirait évidemment de prendre les formules classiques de la Mécanique qui donnent les variations des cosinus au moyen des composantes des rotations. On écrirait deux fois ces équations dans le premier cas, trois dans le second, avec des composantes de rotations différentes (les deux ou trois groupes (7^*), § IV, par exemple), on écrirait le groupe (8^*) (même paragraphe), que je présume avoir établi, le premier, dans sa généralité; puis, en faisant coïncider les axes rectangulaires mobiles avec les tangentes aux trajectoires orthogonales de la surface (le troisième avec la normale), on retrouverait les formules du présent paragraphe, tandis qu'en les faisant coïncider avec les tangentes aux courbes d'intersection des trois surfaces orthogonales, on obtiendrait les formules relatives à cette théorie. C'est cette dernière marche qu'a adoptée M. Bonnet en employant tout de suite les formules d'Euler, ce qui lui a dissimulé un peu, ce me semble, le rôle des rotations partielles, dont la composition analytique, négligée par M. Lamé, avait, d'un autre côté, laissé stériles pour cet illustre géomètre les trois conditions géométriquement évidentes $P^{(\alpha)} = 0$, $Q^{(\beta)} = 0$, $R^{(\gamma)} = 0$.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE MÉCANIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ.

MASSE ÉLECTRIQUE DES CORPS CONDUCTEURS,

PAR M. MARIÉ-DAVY.

Dans le second fascicule de mes Mémoires, publié en 1862, j'annonçais comme devant paraître prochainement trois Mémoires traitant, l'un du pouvoir électromoteur des piles thermo-électriques, l'autre de la pression électromotrice des diverses piles, le dernier de la transformation de la force vive électrique en travail mécanique. Ces Mémoires étaient alors très-avancés; mais j'ai dû suspendre mes recherches sur l'électricité pour me livrer à d'autres études. J'ai pu reprendre récemment la question des pressions électromotrices; elle fait l'objet du présent Mémoire, et m'a permis, dans l'ordre d'idées où je me suis placé, de déterminer la masse de la substance qui, dans un corps conducteur, participe au mouvement électrique. C'est cette masse que j'appelle *masse électrique du conducteur*.

Pour l'intelligence de ce qui va suivre, je crois nécessaire de résumer rapidement mes travaux antérieurs.

Dans ma pensée, l'électricité dynamique est due à un mouvement vibratoire dissymétrique, c'est-à-dire dans lequel l'élément vibrant exécute des excursions inégales des deux côtés de sa position d'équilibre normal, avec déplacement graduel de cette position d'équilibre. Cette dissymétrie aurait pour cause statique la dissymétrie des surfaces de contact de deux corps différents, et, pour cause dynamique, le travail

moléculaire qui s'exécute en ces surfaces dans les piles ordinaires, ou dans la force vive qui leur est apportée sous forme de chaleur dans les piles thermo-électriques. Cette pensée date chez moi de vingt ans; elle m'a servi de guide dans toutes mes recherches. Ce n'est toutefois qu'une hypothèse, et, tout en laissant involontairement percer dans mes écrits mes préoccupations théoriques, je ne l'ai jamais considérée que comme un instrument de recherches et un stimulant au travail.

Envisageant l'électricité comme quelque chose qui se meut, j'ai basé mes formules sur les principes élémentaires de la dynamique, sans y faire intervenir en rien la nature du mouvement, laissant à l'expérience le soin de décider sur ce dernier point. On ne retrouvera donc pas dans ce qui suit une méthode analytique directe allant au but par le chemin le plus court; mais une série de tâtonnements, où chaque pas en avant est appuyé sur une donnée expérimentale. Si mes conclusions sont jugées être, dans une mesure suffisante, d'accord avec les faits, quelque géomètre pourra reprendre la question par des procédés plus précis, montrer les points restés en souffrance et provoquer de nouvelles expériences.

État variable des courants.

Les propositions sur lesquelles je me suis appuyé sont les suivantes :

1° Que l'électricité se transmette dans ses conducteurs comme la lumière et la chaleur se transmettent au travers du vide ou des corps diaphanes et diathermanes, ou bien qu'elle se propage de molécule à molécule comme le fait la chaleur dans les corps athermanes, cette transmission ou propagation se fait dans un temps excessivement court et négligeable lorsque le circuit n'a que quelques dizaines de mètres de longueur.

2° L'intensité d'un courant est proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs, à la vitesse v du mouvement électrique qui le constitue : mouvement qu'il ne faut pas confondre avec sa vitesse V de transmission ou de propagation. L'intensité du courant est en même temps proportionnelle à la masse m en mouvement, et, par conséquent, proportionnelle au produit mv.

3° La résistance R qu'un courant électrique éprouve de la part de

ses conducteurs croît proportionnellement à la vitesse v du mouvement, toutes autres choses égales d'ailleurs.

4° La résistance d'un conducteur croît en même temps proportionnellement à sa longueur, le courant restant le même.

Ces divers points posés, si, considérant un élément dl quelconque du circuit, j'appelle γ l'accélération due à la différence des pressions électromotrices des deux côtés de cet élément, v la vitesse du mouvement électrique au même point au bout du temps t compté à partir du moment où le circuit est fermé, et β l'accélération négative due à la résistance qu'un mouvement d'une vitesse égale 1 rencontre dans l'unité de longueur d'un circuit identique à l'élément dl, j'aurai

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = \gamma - \beta . v . dl.$$

La pression électromotrice ne se transmettant pas dans un temps rigoureusement nul au travers de toute la longueur du circuit, γ est, en réalité, elle-même une fonction du temps t. L'équation différentielle (1) deviendrait donc très-compliquée si on voulait la rendre explicite. Mais comme la vitesse V de transmission ou propagation de l'électricité est excessivement grande, si le conducteur n'a que quelques dizaines de mètres de longueur, on peut y considérer cette vitesse V comme infinie : l'erreur ne sera pas d'un millionième de seconde. La pression électromotrice se répartira instantanément sur toute la longueur de la masse électrique à mouvoir, et l'équation différentielle prendra la forme simple que nous lui avons donnée plus haut. On peut la mettre encore sous une autre forme.

Quelque complexe que soit le circuit d'une pile, on peut remplacer par la pensée chacune de ses parties par une longueur équivalente d'un conducteur normal de section égale à l'unité. Soit l la longueur totale de ce conducteur, dont la résistance équivaut à celle du circuit total; soit m la masse électrique de l'unité de longueur de ce conducteur; soit A la pression électromotrice totale de la pile. La différence des pressions aux deux extrémités de l'unité de longueur du circuit hypothétique sera $\frac{A}{l}$, et l'accélération sera $\gamma = \frac{A}{ml}$. D'un autre côté, la force

résistante de l'unité de longueur sera bv et son accélération négative sera $\frac{b}{m}v = \beta v$.

Nous aurons donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{ml} - \frac{b}{m}v = \frac{A}{ml} - \beta v. \tag{2}$$

D'où, en intégrant de o à t,

$$v = \frac{A}{\beta ml}(1 - e^{-\beta t}). \tag{3}$$

L'intensité i du courant, proportionnelle à mv, peut être représentée par kmv, k étant un coefficient variable avec l'unité adoptée dans la mesure de i. L'équation (3) devient alors

$$\frac{i}{k} = \frac{1}{\beta}\frac{A}{l}(1 - e^{-\beta t}). \tag{4}$$

De ce qui précède, nous déduisons à la fois les lois de l'état variable et celles de l'état permanent.

Dans l'état permanent $\frac{dv}{dt} = 0$, ce qui donne

$$mv = \frac{i}{k} = \frac{1}{\beta}\frac{A}{l}. \tag{5}$$

Et comme l'état permanent n'est obtenu qu'après un certain temps, et que ce temps est très-court, nous en concluons que β est plus grand que l'unité et de plus très-élevé. En faisant en effet $\beta t = \infty$ dans l'équation (4) nous retombons sur l'équation (5).

Mon premier et mon second Mémoire (1^{er} fascicule) sont consacrés au choix et à la fixation d'une unité d'intensité de courant et d'une unité de résistance. Le troisième a pour objet la détermination de β.

Les formules qui, dans ce dernier Mémoire, me permettent de déduire β des données de l'expérience sont homogènes par rapport à i; elles sont donc indépendantes de l'unité de courant adoptée; elles sont également indépendantes de m.

Or, en opérant sur des conducteurs très-divers, cuivre, fer, plomb, platine, sulfate de cuivre en dissolution, j'ai trouvé pour β des nombres variant dans des limites qui ne dépassent pas les limites d'erreur possible des expériences. Deux des nombres les plus éloignés, 18800 et

17600 ont été obtenus avec le même fil de platine dans deux expériences où l'intensité du courant avait varié seulement de 17,2 à 17,4, toutes autres choses égales d'ailleurs. Il est d'autant plus permis, dans une première approximation, de considérer ces nombres comme constants, qu'il suffit de replier le fil sur lui-même pour réduire à moitié la valeur de β. J'ai pris $\beta = 20000$ en nombre rond.

De la constance de β et de sa valeur élevée découlent plusieurs conséquences, entre autres celle-ci. Dans un circuit d'une nature quelconque dont les parties ne s'influencent pas mutuellement et dont le courant n'exécute aucun travail extérieur, ce courant arrive à son état permanent, à un millième de son intensité près, au bout de $\frac{1}{3000}$ de seconde environ. Cette durée de l'état variable augmente quand le courant exécute un travail extérieur.

Conductibilité des corps.

Dans notre équation (2) $\frac{A}{l}$ est la différence des pressions électromotrices exercées aux deux extrémités de l'unité de longueur du circuit hypothétique, A étant la pression électromotrice totale de la pile. $\frac{A}{ml}$ est l'accélération due à cette différence de pression; c'est ce que nous avons appelé γ. L'accélération due à la pression électromotrice totale agissant sur la même masse m sera donc égale à γl. Je pose $\gamma l = G$. J'aurai alors $A = mG$; et, si j'appelle μ la masse électrique de l'unité de volume de mon conducteur hypothétique et s sa section, nous aurons $m = \mu s$ et

(6) $$A = \mu s G.$$

Les équations (3), (4) et (5) deviennent alors :

(7) $$v = \frac{1}{\beta}\,\frac{G}{l}(1 - e^{-\beta t}),$$

(8) $$\frac{i}{k} = \frac{1}{\beta}\,\frac{G\mu s}{l}(1 - e^{-\beta t}),$$

(9) $$\frac{i}{k} = \frac{1}{\beta}\,\frac{G\mu s}{l}.$$

Or, depuis les travaux de MM. Ohm, Fechner et Pouillet, on sait que les lois de la pile se résument dans la formule suivante :

$$\frac{i}{k} = \frac{Bcs}{l}, \tag{10}$$

dans laquelle B est ce que l'on appelle force électromotrice de la pile, et où c, s et l représentent la conductibilité, la section et la longueur du conducteur hypothétique substitué aux diverses parties du circuit réel. Sans nous occuper pour le moment des termes B et $\frac{G}{6}$, qui, dans l'une et l'autre formule, sont des quantités constantes, nous sommes conduit par la comparaison de ces deux équations à considérer c comme proportionnel à μ; c'est-à-dire que la conductibilité d'une substance serait proportionnelle à la masse électrique de l'unité de volume de cette substance.

D'un autre côté, la force résistante r de l'unité de longueur de notre conducteur hypothétique est égale à $6mv$, ou à $\beta\mu sv$. En rappelant que $\frac{i}{k} = mv = \mu sv$, nous en déduisons

$$r = 6\frac{i}{k}. \tag{11}$$

Cette résistance est donc proportionnelle à l'intensité i du courant; mais elle est indépendante de la nature du conducteur, puisque le coefficient 6 en est indépendant lui-même.

Le travail résistant Tr de l'unité de longueur de notre conducteur hypothétique est égal à rv. Nous aurons donc

$$\mathrm{T}r = 6\mu s v^2 = \frac{6}{\mu s}\frac{i^2}{k^2}; \tag{12}$$

ce travail résistant est proportionnel au carré de l'intensité du courant; mais en même temps il dépend, par μ, de la nature du conducteur : il varie en raison inverse de la masse électrique de ce conducteur.

Si aucun changement moléculaire de nature physique ou chimique n'est produit par le courant, le travail résistant Tr apparaîtra tout entier sous forme de chaleur; $6\mu s v^2 = \frac{6}{\mu s}\frac{i^2}{k^2}$ sera donc l'équivalent de

la quantité de chaleur déposée durant chaque seconde dans l'unité de longueur de notre conducteur par le courant $\frac{i}{k}$. En désignant par q cette quantité et par e l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur employée pour exprimer q, nous aurons

$$q = \frac{6}{e\mu s}\frac{i^2}{k^2}; \tag{13}$$

q est proportionnel au carré de i.

Or les expériences de M. Joule nous ont appris que la quantité de chaleur déposée par seconde dans l'unité de longueur d'un conducteur par un courant d'intensité i, est proportionnelle au carré de i et en raison inverse de la section du conducteur et du degré de conductibilité de la substance dont il est formé. Ces lois se résument dans la formule suivante :

$$q = \mathrm{D}\frac{i^2}{cs}. \tag{14}$$

En comparant entre elles les formules (13) et (14), nous arrivons encore à cette conclusion que c doit être proportionnel à μ.

En posant $c = a\mu$, les équations (9) et (13) deviennent

$$\frac{i}{k} = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{G}cs}{al}, \tag{15}$$

$$q = \frac{6a}{ecs}\frac{i^2}{k^2}. \tag{16}$$

Ces deux dernières équations donnent à leur tour,

$$ql = \frac{\mathrm{G}}{e}\frac{i}{k}, \tag{17}$$

ou bien encore,

$$ql = \frac{1}{e}\mu s\mathrm{G}v = \frac{1}{e}\mathrm{A}v. \tag{18}$$

C'est-à-dire que la qualité totale de chaleur déposée par seconde dans tout le circuit est l'équivalent du travail de la pression électromotrice de la pile, quelles que soient la nature et les dimensions du circuit, ce qui est conforme aux résultats de MM. Favre et Silbermann.

Avant d'aller plus loin, voyons comment, d'après les diverses hypothèses admises pour l'électricité, on peut comprendre la proportionnalité entre la conductibilité d'un corps et la masse électrique de son unité de volume.

1° *Théorie des deux fluides.* — A une époque peu éloignée de nous, la théorie des deux fluides était admise par la généralité des physiciens; elle l'est même encore aujourd'hui par un grand nombre d'entre eux. Dans cette théorie, chaque élément d'électricité neutre du conducteur est décomposé par l'élément antérieur; son électricité positive est poussée en avant pour produire une décomposition pareille sur l'élément suivant; son électricité négative est attirée en arrière et se combine avec l'électricité positive de l'élément antérieur, pour reconstituer du fluide neutre propre à subir indéfiniment le même effet. La vitesse V de propagation de l'électricité dépend de la vitesse avec laquelle la polarité des éléments de fluide neutre se propage d'un bout à l'autre du conducteur; la vitesse v du mouvement électrique dépend de la vitesse avec laquelle les deux fluides se séparent sur un élément et se réunissent de nouveau entre fluides fournis par deux éléments consécutifs.

Rien n'empêche d'admettre, dans cette théorie, que la conductibilité d'une substance soit proportionnelle à la masse μ des éléments de fluide neutre contenus dans son unité de volume. La décomposition du fluide neutre et sa recomposition alternatives s'opéreraient avec une vitesse d'autant moindre, pour produire un même courant, que la masse de ce fluide neutre serait plus grande. On l'admet sans difficulté pour un même conducteur dont la section varie; il n'est pas plus difficile de l'admettre en passant d'un conducteur à un autre.

2° *Théorie d'un seul fluide.* — Pour les physiciens qui considèrent un courant électrique comme un véritable flux d'un fluide particulier au travers du conducteur, on arrive à une conclusion analogue. La même quantité de fluide circule au travers de toutes les sections d'un même circuit, homogène ou non de nature et de section. En admettant, ce qui est facile, que le fluide se répande uniformément dans toute l'étendue de chaque section, et qu'il y conserve la même densité, la masse de fluide en circulation dans un conducteur de longueur 1 sera proportionnelle à la section du conducteur, et aussi proportionnelle à la

somme des ouvertures des canaux qui, dans l'unité de section, livrent passage au fluide. La conductibilité d'une substance sera proportionnelle à cette dernière somme.

Cette théorie d'ailleurs peut être comprise d'une autre manière : rien, en effet, n'oblige à supposer que le fluide électrique soit distinct de l'éther. L'identité des deux fluides admise, nous retrouverions la distinction des deux vitesses V et v. V, vitesse de propagation de l'électricité, serait la vitesse avec laquelle la pression électromotrice se propage dans toute la longueur du conducteur ; v, vitesse du mouvement électrique, serait la vitesse de translation de l'éther. Dans ce dernier cas, μ représenterait la masse de l'éther qui, dans l'unité de volume d'une substance donnée, peut se déplacer dans le sens du courant pour produire ce dernier.

3° *Théorie des vibrations.* — Reste une dernière hypothèse, celle du mouvement vibratoire. Ici, c'est l'éther intraparticulaire, en y comprenant tout ou partie des atmosphères éthérées des éléments matériels, qui entrerait en vibration électrique ; rien n'empêcherait même que les éléments matériels y participassent dans une certaine mesure. μ exprimerait encore la masse vibrant électriquement dans l'unité de volume du conducteur. v aurait pour expression $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{d\alpha}{d\tau}$, dans laquelle τ serait la durée d'une demi-oscillation simple et $d\alpha$ la projection, sur la direction du courant, de l'arc de courbe parcouru pendant le temps $d\tau$ par l'élément vibrant. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Jusqu'à présent, rien ne nous oblige à nous prononcer entre ces trois théories. Nous admettons seulement que la conductibilité d'une substance est proportionnelle à la masse du fluide conducteur du mouvement électrique, ou le constituant, qui est contenu dans l'unité de volume de cette substance. Chacune des trois hypothèses peut satisfaire à cette condition ; voyons maintenant ce que dit l'expérience.

Mon quatrième Mémoire (2^{me} fascicule 1862) a pour objet l'étude des conductibilités des diverses dissolutions salines.

On admet en physique que le carré de l'indice de réfraction absolue d'un corps est proportionnel à la densité de l'éther conducteur du mouvement lumineux dans ce corps. Or, des expériences nombreuses, faites avec un très-grand soin par divers physiciens, et en dernier lieu

motrice imprimerait à la masse électrique μs (*); son expression numérique est donc essentiellement variable avec le conducteur adopté comme conducteur normal. Et, en effet, on trouve pour une même pile autant de valeurs de G que l'on emploie pour i d'unités d'intensités différentes, et pour conducteur normal de substances diverses.

Rapprochons les équations (9) et (13)

$$\frac{i}{k} = \frac{1}{6}\frac{G\mu s}{l} \quad \text{et} \quad q = \frac{6}{e\mu s}\frac{i^2}{k^2}.$$

Comme jusqu'à présent notre unité d'intensité de courant est arbitraire, ainsi que la substance choisie pour conducteur normal, nous pouvons déterminer l'une et l'autre par cette double condition que $q = 1$ pour $i = 1$, et que $i = \frac{G}{l}$.

La première condition donne

$$6 = e\mu s k^2, \tag{21}$$

la seconde donne

$$6 = k\mu s; \tag{22}$$

nous en déduisons

$$k = \frac{1}{e} \tag{23}$$

$$\mu s = 6e. \tag{24}$$

Avec ces données, les équations (9) et (13) deviennent

$$q = i^2 \tag{25}$$

$$il = G \tag{26}$$

$$ql = Gi. \tag{27}$$

q est la quantité de chaleur déposée durant une seconde par le courant i dans l'unité de longueur du conducteur; ql est la quantité totale de chaleur déposée dans le circuit : elle est égale à Gi, et pour $i = 1$, $q'l' = G$.

(*) Dans l'hypothèse d'une circulation continue; dans l'hypothèse des vibrations, c'est une force vive (*voir* plus loin).

Les expériences de Faraday nous ont appris que dans une pile ordinaire, ou pile hydro-électrique, la quantité p de métal dissous ou réduit par seconde est proportionnelle à i et à l'équivalent chimique P du métal; en sorte que $p = P\alpha i$ dans laquelle α est une constante arbitraire. En désignant par q et Q les quantités de chaleur dégagées par les poids p et P du métal dissous dans la pile, nous aurons encore $q = Q\alpha i$, d'où $i = \frac{q}{\alpha Q}$. L'équation (27) devient alors $ql = G\frac{q}{\alpha Q}$, et pour $i = 1$,

$$q' l' = G\frac{q'}{\alpha Q}.$$

Si nous supposons $\alpha = 1$, p' devient égal à P et q' à Q, en même temps que $q'l' = G$. Les expériences de M. Favre ont montré, en outre, que $q'l' = Q$; nous en concluons que $G = Q$.

Nous avons donc un moyen pratique de déterminer à la fois notre conducteur normal et notre unité d'intensité de courant, conformément aux conventions ci-dessus. Notre unité d'intensité de courant sera celle qui, en une seconde de temps, dissout ou réduit un équivalent de métal; notre conducteur normal sera celui qui, sous l'unité de longueur, recevra d'un courant égal à l'unité une quantité de chaleur égale à l'unité de chaleur.

L'équivalent chimique d'un corps est un rapport, et non un poids exprimé en fonction d'une unité définie. Il semblerait naturel de choisir le kilogramme, puisque le kilogrammètre est l'unité de travail adoptée, et de prendre $P = 32$ kilogrammes pour le zinc, auquel cas $Q = 18800$ dans la pile de Smée. Mais l'intensité des courants les plus usuels serait représentée par des nombres décimaux d'une longueur excessive. D'ailleurs, l'unité de poids admise pour l'équivalent chimique est indifférente à nos formules, pourvu qu'elle s'applique en même temps à q et à e.

J'ai adopté pour unité d'intensité de courant celle du courant qui, en une heure, dépose 108 millièmes de milligramme d'argent, ou qui dépose par seconde $\frac{108}{3\,600\,000\,000\,000}$ de kilogramme d'argent. Mon unité de chaleur sera celle qui, en une seconde, élève de 1 degré $\frac{1}{3\,600\,000\,000\,000}$ de kilogramme d'eau.

Ces unités admises, la force électromotrice d'une pile est représentée par le même nombre que la chaleur déposée par seconde dans un circuit d'une longueur telle, que l'intensité du courant y soit égale à l'unité. Examinons d'abord ce premier point.

Mes cinquième, sixième et septième Mémoires sont consacrés à l'étude de la force électromotrice des diverses piles hydro-électriques.

Jusqu'à présent nous avons considéré le circuit d'une pile comme formé par un seul conducteur homogène ou par une série de conducteurs différents, sans nous préoccuper de leurs surfaces de jonction nécessaires. Ces surfaces sont de deux natures : pour les unes, les deux conducteurs en contact sont tous les deux solides; pour les autres, l'un des conducteurs est solide et l'autre liquide. Ces dernières seules font l'objet de mon cinquième Mémoire. Le huitième, non encore terminé, se rapporte aux premières.

En désignant par r la longueur d'un conducteur homogène qui, substitué aux deux surfaces de séparation d'un métal plongeant dans une dissolution qu'il sépare en deux parties, laisserait au courant la même intensité, j'étais arrivé en 1846 à l'expression générale suivante :

$$r = a + \frac{b}{i} - \frac{c}{i^2}, \tag{28}$$

Une formule empirique ne saurait être l'expression d'une loi, et il me fallait donner, de la présence de ces trois termes, une interprétation que je ne possédais pas alors.

Or r n'est pas une résistance, c'est une longueur; la résistance de r est proportionnelle à i en même temps qu'à r. En faisant le produit par i, il vient,

$$ri = ai + b - \frac{c}{i}. \tag{29}$$

Le premier terme a tient à une résistance de même nature que celle des conducteurs ordinaires; et, en effet, ce terme disparaît quand on opère dans des conditions telles, qu'aucune couche gazeuse ne puisse être déposée sur l'une ou l'autre des faces de la lame. Nous voyons au contraire que le terme b rappelle le terme G ou force électromotrice; il constitue en effet une force électromotrice négative qui diminue d'autant la force électromotrice de la pile. Il disparaît lorsque les phénomènes

moléculaires produits par le courant des deux côtés de la lame sont exactement inverses et complémentaires; lorsque, par exemple, une lame de zinc bien amalgamé plonge dans une dissolution de sulfate de zinc. D'un côté le zinc est retiré de sa dissolution dans le mercure, de l'autre du zinc est rendu au mercure. Mais si l'on emploie du zinc laminé ordinaire, le métal n'étant pas rendu d'un côté dans l'état où il est pris de l'autre, b ne disparaît plus; il est proportionnel à la chaleur absorbée par le changement d'état.

Si nous multiplions encore ri par i, le produit sera proportionnel à la quantité de chaleur déposée par seconde dans le conducteur r par le courant i; ai^2 sera proportionnel à la quantité de chaleur déposée par seconde dans le conducteur a; bi sera la quantité de chaleur absorbée ou dégagée (suivant que b sera positif ou négatif) par l'action moléculaire effectuée par seconde sous l'influence de i. Quant à c, le signe négatif dont il est affecté indique une action ou travail chimique de même sens que celui de la pile; mais son indépendance de i montre que si ce travail est dû au courant, il ne s'y rattache cependant pas d'une manière directe. Ce terme disparaît en effet quand on opère sur des dissolutions privées d'air, et dans lesquelles il ne se forme ni eau oxygénée ni aucun produit réductible autre que la dissolution elle-même.

Si la portion de r qui correspond à chacune des deux surfaces de contact contient d'autres termes, comme les phénomènes thermo-électriques en sont la preuve, ces termes sont de signes contraires, et leur somme est égale à zéro.

Le second terme b nous importe seul; il montre que la force électromotrice G d'une pile est égale à la somme algébrique de tous les termes semblables qui peuvent naître dans le circuit partout où un liquide et un solide sont au contact, partout même où deux solides ou deux liquides sont au contact. C'est ainsi que dans une pile de Smée dont les deux pôles sont réunis par un conducteur métallique, et où toute l'action chimique se réduit à la substitution du zinc à l'hydrogène dans le composé SO^4H, la force électromotrice G est représentée numériquement par la différence des quantités de chaleur que dégagent Zn et H en se combinant avec SO^4. Nous voyons de plus, par ce qui précède, que, pour mesurer la force électromotrice qui naît au contact de deux

corps, il n'est pas nécessaire, fût-ce possible, de former une pile avec eux seuls : il suffit de les introduire dans un circuit et de mesurer le changement qu'ils apportent à la force électromotrice antérieure du circuit.

C'est en partant de ces données que j'ai cherché à vérifier la proportionnalité de ql à G dans un travail qui fait l'objet de mon sixième Mémoire, et pour lequel M. Troost m'a prêté son concours. Cette vérification ressort déjà des expériences de M. Joule; mais sur un point aussi important pour la théorie mécanique de l'électricité il m'avait semblé nécessaire que des vérifications nouvelles, plus étendues et plus variées, fussent entreprises avec toute la précision que comporte l'état actuel de la science.

Dans ce travail, mon unité d'intensité de courant avait été choisie comme il convient pour conduire à l'égalité $ql = G$ quand l'intensité du courant égale l'unité. Mais j'avais pris arbitrairement pour conducteur normal une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section, et mes longueurs l étaient exprimées en mètres de cette colonne (deuxième Mémoire). On comprendra facilement toutefois qu'en comparant la valeur trouvée pour la force électromotrice d'une pile, celle de Smée, par exemple, avec la quantité de chaleur dégagée par la dissolution d'un équivalent de zinc dans l'acide sulfurique, nombre donné par MM. Favre et Silbermann, je pouvais en déduire le coefficient par lequel il me fallait multiplier toutes mes forces électromotrices pour avoir les valeurs de G correspondantes. L'unité du courant peut même alors être quelconque.

Les résultats consignés dans mon sixième Mémoire diffèrent en quelques points de ceux obtenus par M. Favre; mais si l'on considère leur accord général, les causes d'erreur existant des deux parts, les limites dans lesquelles ces erreurs sont comprises, on trouve que les écarts ne sortent pas de ces limites.

J'ai cependant repris la question dans un septième Mémoire, après avoir étudié une à une les causes d'erreur que comporte la détermination de G par la boussole, afin de supprimer les unes et d'atténuer les autres. J'ai pu ainsi dresser un tableau très-approché des valeurs de G correspondant à l'acte de la dissolution de trente métaux dans les acides sulfurique, azotique et chlorhydrique, en tenant compte de la chaleur

que l'hydrogène, dont ils prennent la place, fait disparaître en sortant de sa combinaison.

L'ordre daus lequel sont rangés ces métaux par rapport aux valeurs décroissantes de G est à peu près identiquement le même que l'ordre dans lequel ils ont été rangés par rapport à ce qu'on nomme leur affinité pour l'oxygène. L'affinité de deux corps l'un pour l'autre paraîtrait donc liée à la quantité de chaleur dégagée dans l'acte de leur combinaison par équivalent. L'une serait la mesure de l'autre. Tout ce qui tend à modifier ou à empêcher ce dégagement de chaleur modifie l'affinité ou l'empêche de s'exercer.

Ultérieurement, dans une Note présentée à l'Institut le 1er avril 1867, j'ai défini mon conducteur normal, conformément aux conventions indiquées plus haut, en disant que 1 mètre de longueur de ce conducteur reçoit par heure, d'un courant réduisant par heure 108 millièmes de milligramme d'argent, une quantité de chaleur capable d'élever de 1 degré en une heure 1 millième de milligramme d'eau. Puis, sans rechercher encore quelle est la substance qui jouit de cette propriété, j'ai déterminé directement, au moyen du calorimètre, la longueur de mon conducteur hypothétique, qui équivaut au fil de platine employé dans toutes mes expériences. En calculant dans ces nouvelles conditions la force électromotrice de la pile de Smée, je trouve exactement et directement le nombre 18800, obtenu par MM. Favre et Silbermann pour la chaleur dégagée pendant l'acte de la dissolution du zinc dans l'acide sulfurique.

En comparant l'unité nouvelle avec l'unité ancienne, je trouve qu'une colonne de mercure à zéro, de 1 mètre de long, de 0,00000073 de mètre carré de section, satisfait à la condition posée, qu'un courant égal à 1 y dépose une unité de chaleur par seconde. Cette colonne est ce que j'appellerai dorénavant *conducteur normal*.

Nous sommes actuellement en mesure de calculer la masse électrique renfermée dans 1 mètre cube de mercure, et par suite dans une substance quelconque dont le degré de conductibilité est connu.

Masse électrique des conducteurs.

Revenons aux expressions (23) et (24) :

$$k=\frac{1}{e},\quad \mu s=\epsilon e,\quad \text{d'où}\quad \nu=\frac{i}{\epsilon}.$$

e est l'équivalent mécanique de notre unité de chaleur; cette unité est égale à $\frac{430}{3\,600\,000\,000\,000}$ de kilogrammètre.

$$k=\frac{3\,600\,000\,000\,000}{430}=8\,370\,000\,000,$$

$\mu s=\frac{20000\times 430}{3\,600\,000\,000\,000}=0{,}000\,0024$, et par suite $\mu=3{,}27$, tandis que la masse de 1 mètre cube d'air à zéro et sous la pression 760 n'est que de 0,13.

La masse pondérable de 1 mètre cube de mercure est $1387=M$. Le rapport des deux masses est donc $\frac{M}{\mu}=424$. Ce rapport s'élève à plusieurs millions pour les dissolutions salines; mais pour le palladium et l'argent, les meilleurs conducteurs connus, il descend à 6. La masse électrique de l'unité de volume y serait supérieure à la densité de l'eau. Il semble évident que, dans les métaux au moins, la matière pondérable participe d'une manière directe au mouvement électrique, ce qui rendrait impossible toute idée de transport continu d'un fluide, et même toute idée de fluide spécial.

La même conclusion se présente sous une autre forme d'une manière encore plus frappante, si l'on fait l'application des résultats précédents à la théorie des deux fluides.

Dans la théorie des deux fluides on suppose que les éléments chimiques qui se combinent sont chargés, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative; que, de plus, chacun d'eux se trouve environné d'une atmosphère d'électricité de nom contraire inégalement répartie autour de l'élément. Pendant la combinaison chimique, les électricités propres aux éléments se neutraliseraient mutuellement et directement, tandis que leurs atmosphères devenues libres se neutra-

liseraient au travers du circuit. En chaque section de ce dernier il y aurait décomposition et recomposition de fluide neutre en quantité égale à celle qui se produit pendant la combinaison chimique.

Or dans notre conducteur normal, la masse du fluide neutre décomposable serait égale à 0,0000024. Pour un courant égal à 1, la vitesse du mouvement de décomposition et de recomposition serait égale à $\frac{1}{20000}$. La masse de l'électricité qui passerait en chaque section du conducteur pendant une seconde, sous l'influence d'un courant égal à 1, serait donc égale à 0,000 000 000 12, la moitié passant dans un sens, la moitié dans l'autre. La combinaison d'un équivalent, ou 32 kilogrammes de zinc, avec l'acide sulfurique, durerait 3 600 000 000 000 secondes. La masse totale d'électricité positive qui traverserait chaque section du conducteur pendant le même temps serait égale à la moitié du produit de ces deux nombres, ou à 216. Ainsi, un équivalent de zinc dont la masse est 3,2 environ, se trouverait chargé d'une masse d'électricité négative égale à 216. Malgré la simplicité apparente que la théorie des deux fluides permet d'apporter dans l'énoncé et la coordination des divers faits de l'électricité statique, cette théorie présente des difficultés très-sérieuses quand on cherche à l'approfondir. Les résultats ci-dessus ne paraîtront sans doute pas la moindre de ces difficultés.

La difficulté est tout aussi grande dans la théorie d'un seul fluide circulant dans les conducteurs à la manière de l'eau ou de l'air dans leurs conduites. En présence de la masse énorme de fluide qui passerait en chaque section du circuit, il faut nécessairement admettre que c'est toujours la même masse qui circule indéfiniment, comme fait le sang dans l'appareil circulatoire. Mais alors on ne comprend plus quelle peut être la force motrice. En interprétant même la théorie dans ce sens, on comprendrait encore avec peine comment la masse en circulation dans l'argent pourrait s'élever au sixième de la masse de ce métal.

La théorie des vibrations ne présente plus de difficultés du même ordre. Elle en offre d'autres sans doute; mais, outre cet avantage qu'elle réduirait d'une unité le nombre des hypothèses fondamentales admises en physique, elle permettrait de relier des faits qui échappent entière-

ment à la théorie des deux fluides et à la théorie d'un seul fluide. Elle semble de plus offrir une base plus solide aux travaux analytiques, qui seuls peuvent la fixer dans la science.

Avant d'esquisser cette dernière hypothèse, quelques mots d'explication me semblent nécessaires sur la manière dont je concevrais les phénomènes chimiques.

Considérons un corps simple ou composé. Ce corps contient une certaine quantité de chaleur; toutes ses parties sont en vibration. Admettons pour un moment que cette chaleur soit simple ou uniréfrangible. Si deux points infiniment voisins sont en vibration concordante, deux points distants d'une demi-longueur d'onde sont en vibration discordante. J'admets que ces deux derniers points ne peuvent pas faire partie d'un même élément matériel; ils appartiennent à deux éléments distincts. Les dernières particules d'un corps considéré comme simple par les chimistes auraient des dimensions telles, que chacune d'elles vibrerait pour ainsi dire d'un bloc, ou du moins qu'on n'y pourrait trouver deux parties en vibration discordante, et cela, quel que soit le mouvement vibratoire que nous puissions lui communiquer. Mais on conçoit qu'un mouvement vibratoire assez rapide diminuât assez la longueur d'onde de ce mouvement pour que l'élément réputé simple pût se fractionner et le corps changer de nature. Cette hypothèse ne suppose nullement qu'il existe une différence fondamentale entre la matière pondérable et l'éther. On pourrait même concevoir qu'à l'origine des choses l'état vibratoire de l'éther eût été tel, que tous les éléments vibrants aient été réduits aux éléments simples de l'éther. Ce que nous appelons matière n'aurait pas existé alors. Ce n'est que par le progrès du refroidissement que ces éléments simples auraient pu se grouper et former les molécules élémentaires des divers corps simples. On retrouverait le même assemblage de corps simples partout où le refroidissement s'est opéré suivant les mêmes lois. Mais, d'autre part, rien non plus ne s'oppose à ce que l'on considère la matière comme distincte de l'éther.

Pour un certain nombre de corps composés, une circonstance analogue se présente. Nous ne disposons pas de sources de chaleur à température assez élevée pour diviser leurs groupes moléculaires; mais l'expérience nous apprend qu'en général, à mesure que la température

d'un corps composé s'élève, à mesure que sa chaleur monte dans l'ordre des réfrangibilités ou que la vibration y devient plus rapide et la longueur d'onde plus courte, la décomposition est rendue plus facile. Cette décomposition est même spontanée pour un grand nombre de corps dès que la température atteint un certain degré, soit parce que la longueur d'onde ayant diminué n'est plus en rapport convenable avec les dimensions de l'élément composé, soit parce que sous l'influence d'une chaleur plus intense chaque groupe élémentaire a lui-même augmenté de volume, soit enfin parce que le désaccord des vibrations existant au début est rendu plus sensible par une plus grande ampleur de la vibration.

Dans ce qui précède, nous ne faisons qu'indiquer les limites extrêmes du volume occupé par chaque élément matériel, simple ou composé. Ce volume lui-même peut varier considérablement en deçà de ces limites.

Une combinaison chimique aurait donc pour effet de réunir en un seul deux ou plusieurs éléments distincts.

Examinons maintenant le mouvement vibratoire en lui-même. Par le centre d'un élément vibrant je mène trois axes rectangulaires quelconques, et je prends l'un d'eux, l'axe des x. L'équation différentielle seconde est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax, \tag{30}$$

dans laquelle x est compté à partir de l'origine, et a est une fonction simple de l'élasticité de l'éther. On en déduit, en posant $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{a}}$,

$$x = \frac{\gamma_1}{\sqrt{a}} \sin \pi \frac{t}{\tau}, \tag{31}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} \frac{\gamma_1}{\sqrt{a}} \cos \pi \frac{t}{\tau}, \tag{32}$$

et pour $t = \tau$,

$$\frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau} \gamma_1. \tag{33}$$

$\frac{1}{\tau} \gamma_1$ est l'accélération initiale du mouvement : c'est ce que j'avais ap-

pelé v d'une manière générale, pour ne rien préjuger sur la nature du mouvement électrique. En désignant par μ_1 la masse de l'élément vibrant, ce que j'avais appelé $\mu_1 v$, et doit s'écrire $\mu_1\gamma_1$, n'est autre que la force d'impulsion qui, agissant pendant un temps égal à τ sur la masse μ_1 partant du repos, lui imprimerait la vitesse que possède cet élément dans le sens des x lorsqu'il passe par sa position d'équilibre. $\frac{1}{2}\mu_1\gamma_1^2$ est la force vive qu'il possède à cet instant. En chacun des autres points de son parcours sur l'axe des x l'élément a une vitesse différente; mais les variations de la force vive sont égales, au signe près, aux variations des quantités de travail; en sorte qu'à chaque instant la somme de la force vive et de la quantité de travail développée par l'élasticité du milieu est constante et égale à $\frac{1}{2}\mu_1\gamma_1^2$: $\frac{1}{2}\mu_1\gamma_1^2$ est la mesure de ce que l'on appelle l'énergie totale de l'élément μ_1 dans le sens des x.

Dans une enceinte dont tous les points sont à la même température, et en dehors de tout mouvement électrique, j'admets que $\mu_1\gamma_1$ est le même sur les trois axes; j'admets de plus que pour des éléments de même volume 1, et dont l'accélération initiale est γ, $m\gamma$ a la même valeur pour tous les éléments de l'enceinte. Je pose

$$m\gamma = \theta. \tag{34}$$

Pour un élément dont la masse est μ, et dont les dimensions sont λ sur chacun des trois axes, nous aurons

$$\mu\gamma = \theta\lambda^3, \tag{35}$$

$$\mu\gamma^2 = \theta\lambda^3\gamma = \theta^2\frac{\lambda^6}{\mu}. \tag{36}$$

Imaginons pour un moment que les corps soient composés d'éléments matériels sans atmosphères. Soient n le nombre de ces éléments contenus dans l'équivalent chimique d'un corps, P le poids de cet équivalent, Q la quantité totale de chaleur contenue dans l'unité de poids du corps, et e l'équivalent mécanique de la chaleur; il viendra

$$PQe = 3n\mu\gamma^2 = 3n\mu\frac{\theta^2\lambda^6}{\mu^2}, \tag{37}$$

et comme $P = n\mu g$,

(38) $$Q = \frac{3\theta^2}{ge}\frac{\lambda^4}{\mu^2},$$

d'où encore

(39) $$\frac{dQ}{d\theta^2} = \frac{3}{ge}\frac{\lambda^4}{\mu^2} = aC.$$

La capacité calorifique C d'un corps à une température quelconque θ^2 sera exactement proportionnelle à la valeur de $\frac{\lambda^4}{\mu^2}$ correspondante à cette température; et, dans l'hypothèse où ce rapport ne changerait pas avec θ^2, la quantité totale Q de chaleur contenue dans l'unité de poids d'un corps serait proportionnelle à C, et en même temps proportionnelle à θ^2. L'expérience démontre qu'il n'en est pas ainsi généralement.

Considérons maintenant deux éléments matériels de masses μ_1 μ_2, de dimensions linéaires λ_1 λ_2, et dont les accélérations initiales sont γ_1 et γ_2; la température étant supposée la même, nous aurons

$$\mu_1\gamma_1^2 = \theta^2\frac{\lambda_1^4}{\mu_1}, \quad \mu_2\gamma_2 = \theta^2\frac{\lambda_2^4}{\mu_2}, \quad \mu_1\gamma_1^2 + \mu_2\gamma_2^2 = \theta^2\left(\frac{\lambda_1^4}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^4}{\mu_2}\right).$$

Imaginons que ces deux éléments se combinent en un seul de masse $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$, de dimensions linéaires λ_3, d'accélération initiale γ_3; cet atome composé étant ramené à la même température θ, nous aurons

$$\mu_3\gamma_3^2 = \theta^2\frac{\lambda_3^4}{\mu_3},$$

d'où nous déduisons, pour la force vive rendue disponible par la combinaison des deux éléments,

$$\mu_1\gamma_1^2 + \mu_2\gamma_1^2 - \mu_3\gamma_3^2 = \theta^2\left(\frac{\lambda_1^4}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^4}{\mu_2} - \frac{\lambda_3^4}{\mu_3}\right),$$

et pour n éléments composant chacun des équivalents des trois corps,

$$e(PQ + P'Q' - P''Q''), \quad \text{d'où} \quad q = PQ + P'Q' - P''Q'',$$

en désignant par q la quantité de chaleur dégagée dans l'acte de la combinaison.

q serait d'autant plus grand que λ_2 serait plus faible; la stabilité du composé serait elle-même d'autant plus grande que λ_2 serait plus faible, ce qui donnerait l'explication de la parenté qui existe entre la stabilité d'un corps et la chaleur dégagée dans l'acte de la combinaison de ses éléments.

Dans cette hypothèse d'éléments matériels dénués d'atmosphères, les phénomènes présenteraient donc une grande simplicité qui ne se rencontre pas dans les résultats de l'expérience.

L'équation $\mu\gamma^2 = \theta^2 \frac{\lambda^4}{\mu}$ est applicable aux divers éléments des atmosphères comme aux éléments matériels eux-mêmes. Il en résulte que dans un espace en équilibre de température et pour chaque élément de volume constant, qu'il renferme ou non de la matière pondérable, la force vive ou l'énergie y varie en raison inverse de la masse μ contenue dans ce volume. L'énergie emmagasinée dans le volume de la terre, par exemple, est beaucoup moindre qu'elle ne le serait dans un même volume d'éther non condensé ayant la même température, et l'énergie serait nulle en un point dont la densité serait infinie. Il en résulte qu'un accroissement de la diffusion des éléments dans un corps dont le volume total ne change pas amène une diminution dans l'énergie du corps, et par suite un dégagement de chaleur, tandis que si la diffusion a lieu par l'effet de l'accroissement de volume du corps, il y a au contraire accroissement d'énergie et par suite absorption de chaleur. Dans l'expression des quantités de chaleur contenues dans un corps, il faut donc faire entrer à la fois et le volume du corps, et le volume de ses éléments matériels, et le mode de diffusion de ses atmosphères éthérées.

Quoi qu'il en soit, lorsque deux corps se combinent, il y a généralement dégagement d'une certaine quantité q de chaleur. Si q restait sur place, elle servirait à élever la température du composé formé : elle est l'origine de l'incandescence dans les combustions vives. Le mouvement électrique, lorsqu'il peut s'établir, la distribue simultanément en chaque point du circuit en raison des résistances qu'il y rencontre. Cette diffusion de la chaleur ne peut évidemment avoir lieu que par l'intermédiaire de l'éther intraparticulaire constituant les atmosphères des éléments matériels.

Si la combinaison s'opère dans un circuit fermé, nous nous trouvons dans les mêmes conditions que si nous avions affaire à une pile thermo-électrique. La seule différence est que dans celle-ci la chaleur est fournie de l'extérieur, tandis que dans la première elle se dégage de la surface même de contact des deux substances qui se combinent. Au fond le résultat est le même.

Considérons deux corps de natures différentes en contact l'un avec l'autre et ayant même température. Soient μ et μ' deux éléments de volumes égaux pris dans l'éther intraparticulaire des deux corps, et γ et γ' leurs accélérations initiales. Ces deux éléments, supposés animés d'un mouvement vibratoire de même période τ, feront dans une même direction des excursions maxima x et x' données par les relations

$$x = \frac{\gamma}{\sqrt{a}}, \quad x' = \frac{\gamma'}{\sqrt{a}}, \quad \text{ou bien} \quad x = \frac{\theta}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{\mu}, \quad x' = \frac{\theta}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{\mu'}.$$

Ces excursions varient en raison inverse de μ.

Sur une ligne menée dans l'intérieur d'un corps homogène, les effets de cette inégalité des excursions se reproduisant au même instant périodiquement en sens contraires dans la longueur de la ligne, leur somme est nulle. Dans un circuit composé de deux métaux soudés bout à bout par leurs deux extrémités et à la même température en tous ses points, l'effet produit à l'une des surfaces est équilibré par l'effet inverse produit à l'autre. Mais si le circuit est ouvert, cette cause d'équilibre n'existant plus, un changement correspondant se produira dans les valeurs de μ et μ' aux deux extrémités séparées du circuit; la plus faible augmentera, la plus forte diminuera, de manière à rétablir la différence qui résultait du contact détruit. L'une des extrémités contiendra de l'éther en excès, l'autre de l'éther en moins. On dira que l'une est électrisée positivement, l'autre négativement. Ce nouvel état d'équilibre sera dû au transport de tout l'éther du conducteur qui se sera déplacé d'une quantité correspondante dans le sens du milieu où μ est le plus grand au milieu où μ est le plus faible.

Rétablissons la continuité du circuit, mais en chauffant l'une des soudures : l'équilibre sera détruit sans pouvoir se rétablir. Chaque élément μ oscillera dans le sens du courant autour d'une position d'équi-

libre qui se déplacera graduellement. Dans deux oscillations successives, elle s'avancera dans le sens du courant plus à la seconde oscillation qu'à la première, et elle rétrogradera moins à la seconde qu'à la première.

La liaison qui existe entre les atmosphères éthérées et leurs centres matériels oppose une certaine résistance au déplacement du centre de vibration de chaque élément d'éther. Cette résistance produit dans les liquides l'entraînement du fluide lui-même; au contact des liquides et des solides elle favorise la dissolution de ces derniers; dans les corps solides, elle est équilibrée par les liaisons du système, mais elle y amène à la longue un changement permanent dans l'état moléculaire. La même liaison amène la transformation rapide de la vibration électrique en vibration calorifique.

Dans un rayon de lumière, la vibration est nulle dans le sens des x ou de propagation de l'onde. Dans un corps chaud dans lequel μ varie symétriquement tout autour de chaque centre matériel, la vibration se fait en moyenne de la même manière sur les trois axes. Dans un circuit en activité, la vibration électrique a lieu dans le sens de la propagation du courant, et toute la force vive mise en liberté par l'action chimique s'écoule par cette composante. L'électricité dynamique n'est plus alors qu'une transformation de la vibration calorifique. La lumière, la chaleur, l'électricité dynamique rattachées à la même cause ne sont point des créations, mais de simples déplacements de force vive ou d'énergie préexistant dans les corps. Les manifestations des affinités chimiques ne sont elles-mêmes que des questions de mécanique ordinaire que tôt ou tard on pourra soumettre à l'analyse algébrique.

EXTENSION

AUX

ÉQUATIONS SIMULTANÉES DES FORMULES DE NEWTON

POUR

LE CALCUL DES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES DES ÉQUATIONS ENTIÈRES,

PAR M. CHARLES MÉRAY,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

1. La théorie des équations simultanées est encore extrêmement imparfaite : d'abord, il règne en général une grande obscurité sur les opérations qui impliquent plus d'une variable ou inconnue indépendante, puis, les géomètres demandent peut-être trop exclusivement à l'élimination les secrets de cette théorie. On ne peut nier, en effet, les défauts d'une méthode compliquée qui repose précisément sur la destruction préalable des fonctions à étudier et qui d'ailleurs n'atteint pas les équations transcendantes. Il est permis de croire que les efforts des géomètres seraient plus fructueux, s'ils s'attachaient moins à la perfectionner pour tout y réduire, qu'à transporter dans la doctrine des expressions à plusieurs variables ces grandes vérités qui dominent toutes les questions où il en entre une seule : la théorie ordinaire des dérivées et des intégrales, le principe de la résolution d'un polynôme entier en facteurs linéaires, le théorème de Cauchy pour le dénombrement des racines renfermées dans une enceinte donnée, etc.

Je tente ici un essai de ce genre. On sait que les fonctions symétriques des racines d'une équation entière se déduisent des sommes de puissances semblables que les formules de Newton permettent de calculer. De même, celles des solutions de plusieurs équations simulta-

nées dépendent de fonctions symétriques plus simples analogues aux sommes de Newton : ce sont des sommes dont chaque terme est le produit des solutions d'un même système élevées respectivement à des puissances déterminées. Poisson a le premier donné une méthode pour les calculer; j'en propose une autre tirée de principes tout différents. Le procédé de Poisson exige la formation d'une équation finale dont chaque racine est une même fonction linéaire des solutions d'un système quelconque; on cherche ensuite les coefficients des puissances et produits des paramètres de la fonction linéaire dans les sommes des puissances semblables des racines de l'équation finale calculées au moyen des formules de Newton, puis convenablement ordonnées. Le mien consiste à établir entre certaines fonctions à plusieurs variables une identité propre, analogue à celle d'où l'on tire les formules de Newton, et à en déduire comme on le fait de celle-ci des équations linéaires dont les solutions sont précisément les sommes inconnues.

Je ne sais si, dans la pratique, la nouvelle méthode est préférable à l'ancienne; mais fût-elle la plus pénible, qu'elle me semblerait offrir encore un certain intérêt théorique. Elle rétablit en effet l'unité dans un point de l'analyse générale des équations, et fait soupçonner des analogies très-remarquables entre certaines expressions à plusieurs variables et celles que l'on rencontre à chaque pas quand on raisonne sur une seule.

2. Il suffira d'exposer la méthode dans le cas de deux équations à deux inconnues. Soient donc

$$(a) \qquad \begin{cases} (1) \quad f_1(x, y) = 0, \\ (2) \quad f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

les équations données de degrés m_1, m_2; je supposerai, sauf à examiner le cas contraire dans une autre occasion, que les polynômes homogènes formés dans chaque équation par l'ensemble des termes du degré le plus élevé (nous les nommerons pour abréger les *groupes principaux*), sont *disjoints*, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent s'évanouir simultanément qu'en faisant à la fois $x = 0$, $y = 0$. Cette dénomination paraît naturelle, car les coefficients de plusieurs fonctions homogènes en même nombre que les variables sont toujours liés par une ou plusieurs rela-

tions, quand les fonctions s'annulent à la fois pour un système de valeurs où toutes les variables ne sont pas nulles.

On sait alors par le théorème de Bezout que le système (a) offre précisément $m_1 m_2$ couples de solutions finies égales ou inégales; je rappelle brièvement la démonstration de ce point essentiel.

En vertu de l'hypothèse admise, l'un des groupes principaux, celui de l'équation (1) par exemple, contient un terme indépendant de x; car autrement ils s'évanouiraient tous deux en faisant x égal à zéro et y différent de zéro; donc le coefficient de y^{m_1} dans cette équation est une constante différente de zéro, et en la résolvant par rapport à y, après l'avoir ordonnée, on trouvera, pour toute valeur finie de x, m_1 racines finies,

$$(3) \qquad y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{m_1}.$$

Le produit

$$(4) \qquad f_2(x, y_1)\ldots f_2(x, y_{m_1})$$

est une fonction entière et symétrique de ces racines; il se réduit donc à une fonction entière de x et des quotients obtenus en divisant les coefficients des puissances inférieures de y dans l'équation (1) par celui de y^{m_1} : or ce coefficient est une constante; donc ces quotients sont des fonctions entières de x et le produit (4) en est lui-même une autre $F(x)$.

Maintenant, toute valeur de x appartenant à un couple de solutions des équations (a) vérifiera la suivante :

$$(5) \qquad F(x) = 0,$$

car elle rendra nul l'un au moins des facteurs du produit (4) sans rendre infinis les autres. Réciproquement, toute racine α de l'équation (5) fera partie d'un couple de solutions ; car cette valeur de x annulant le produit (4) réduira à zéro l'un de ses facteurs au moins; la valeur correspondante de y sera celle des racines (3) qui entre dans le facteur nul. Rien n'empêche qu'il y en ait plusieurs, car l'hypothèse $x = \alpha$ peut annuler plusieurs facteurs à la fois.

3. Avant d'aller plus loin, il importe de distinguer les couples *simples* des couples *multiples*. Soit (α, β) un couple de solutions des équa-

tions proposées; on a

$$f_1(\alpha, \beta) = 0;$$

donc le développement de $f_1(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$ ne contient pas de terme indépendant de ces différences considérées comme variables indépendantes, et on peut mettre cette fonction sous la forme

$$f_1(x, y) = p_1(x-\alpha) + q_1(y-\beta),$$

p_1, q_1 désignant des fonctions entières de $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$. On peut poser de même

$$f_2(x, y) = p_2(x-\alpha) + q_2(y-\beta)$$

et écrire les équations proposées comme il suit :

$$p_1(x-\alpha) + q_1(y-\beta) = 0,$$
$$p_2(x-\alpha) + q_2(y-\beta) = 0.$$

Soit à présent (α', β') un couple de solutions différent du premier, c'est-à-dire tel, que les différences $(\alpha'-\alpha)$, $(\beta'-\beta)$ ne soient pas toutes deux nulles; on aura évidemment, pour $x = \alpha'$, $y = \beta'$,

$$(5\,bis)\qquad \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, qui est entière par rapport à x, y, est donc vérifiée par tout couple autre que (α, β), mais il n'y a pas de raison pour qu'elle le soit par (α, β) lui-même. Quand elle l'est, ce couple de valeurs, qui satisfait déjà aux équations proposées, jouit encore d'une seconde propriété qui n'appartient en général qu'à ceux qui diffèrent de lui : on peut dire qu'il est *multiple;* dans le cas contraire, on le nommera *simple.*

On voit sans peine que, pour $x = \alpha$, $y = \beta$, on a

$$p_1 = \frac{df_1}{dx}, \quad q_1 = \frac{df_1}{dy}, \quad p_2 = \frac{df_2}{dx}, \quad q_2 = \frac{df_2}{dy},$$

et par conséquent

$$\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, *un couple donné sera simple ou multiple selon qu'il ne satisfera*

pas ou satisfera à l'équation

$$
(6) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 0,
$$

qui a pour premier membre le déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées.

L'analogie de ces définitions avec celles de la théorie des équations à une seule inconnue est évidente; le premier membre de l'équation (5 *bis*) joue le rôle du quotient de la division du premier membre d'une équation à une inconnue par la différence entre l'inconnue et une racine; celui de l'équation (6) correspond à la dérivée première de ce polynôme. Cette analogie se soutiendra dans la généralisation des formules de Newton.

4. On peut au surplus justifier encore ces définitions par les considérations suivantes. Quand les coefficients des équations (a) rendus variables deviennent infiniment voisins de leurs valeurs actuelles, il peut se faire que plusieurs couples distincts des nouvelles équations aient leurs éléments respectivement infiniment voisins de ceux d'un même couple des proposées. Les racines de ce couple-limite satisfont alors non-seulement aux équations données, mais encore à une série d'équations entières dont le nombre est inférieur d'une unité à celui des couples variables dont il est la limite commune. Or, ces équations comprennent toujours la relation (6).

En effet, soient (x', y'), $(x' + \Delta x', y' + \Delta y')$ deux des couples variables dont il s'agit : $\Delta x'$, $\Delta y'$ sont des quantités infiniment petites; soient encore $f'_1\ (x, y)$, $f'_2\ (x, y)$ ce que deviennent les premiers membres des équations proposées après la variation des coefficients. On aura

$$
(7) \qquad \begin{cases} f'_1(x', y') = 0, & f'_1(x' + \Delta x', y' + \Delta y') = 0, \\ f'_2(x', y') = 0, & f'_2(x' + \Delta x', y' + \Delta y') = 0, \end{cases}
$$

ou, en développant les premiers membres des dernières équations et ayant égard aux premières,

$$
\frac{df'_1}{dx'}\Delta x' + \frac{df'_1}{dy'}\Delta y' + R_1 = 0, \quad \frac{df'_2}{dx'}\Delta x' + \frac{df'_2}{dy'}\Delta y' + R_2 = 0,
$$

R_1, R_2 étant des sommes de termes proportionnels à des puissances et produits de $\Delta x'$, $\Delta y'$ dont les degrés, par rapport à ces quantités, surpassent le premier. On en déduit

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1'}{dx'}, & \frac{df_1'}{dy'} \\ \frac{df_2'}{dx'}, & \frac{df_2'}{dy'} \end{vmatrix} + \left[\frac{R_1}{\Delta x'}\frac{df_2'}{dy'} - \frac{R_2}{\Delta x'}\frac{df_1'}{dy'}\right] = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1'}{dx'}, & \frac{df_1'}{dy'} \\ \frac{df_2'}{dx'}, & \frac{df_2'}{dy'} \end{vmatrix} + \left[\frac{R_2}{\Delta y'}\frac{df_1'}{dx'} - \frac{R_1}{\Delta y'}\frac{df_2'}{dx'}\right] = 0.$$

Si maintenant le rapport $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ne croît pas indéfiniment, il résulte de la nature de R_1 et R_2 que le dernier terme de la première équation a zéro pour limite; si au contraire $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ est infini, $\frac{\Delta x'}{\Delta y'}$ est infiniment petit, et on pourra affirmer que le second terme de la dernière équation tend vers zéro. Donc, comme il fallait le prouver, on a, dans les deux cas,

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} = \lim. \begin{vmatrix} \frac{df_1'}{dx'}, & \frac{df_1'}{dy'} \\ \frac{df_2'}{dx'}, & \frac{df_2'}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc l'équation (6) n'est pas vérifiée, le couple (α, β) ne peut être considéré comme la limite commune de plusieurs couples de racines des équations (7), ce qu'on peut exprimer en disant, comme nous le faisons, qu'il est *simple* (*).

5. Dans ce qui suit, je supposerai que les équations proposées n'admettent que des couples de solutions simples, et, partant de cette

(*) Personne, que je sache, ne s'est encore occupé des propriétés relatives à la multiplicité des systèmes de racines des équations simultanées; je n'insiste pas davantage sur un point dont la discussion complète ne serait à sa place que dans une théorie générale des équations simultanées.

hypothèse, je vais démontrer qu'elles ont $m_1 m_2$ couples distincts de racines.

I. *Toute racine α de l'équation finale* (5) *fait partie d'autant de couples de solutions que son degré de multiplicité renferme d'unités.*

Supposons d'abord que, pour $x=\alpha$, aucune des quantités $\frac{df_1(x,\eta)}{d\eta}$ ne soit nulle, c'est-à-dire que l'équation (1) n'ait pas de racines égales. Quand α est une racine simple de l'équation (5), on a, pour $x=\alpha$,

$$\mathrm{F}(x)=0,\quad \mathrm{F}'(x)\ \text{non}=0;$$

ou bien, en remplaçant $\mathrm{F}(x)$ par le produit (4) et $\frac{d\eta}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation (1) différentiée,

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{i=m_1}\left(\frac{df_2}{dx}-\frac{df_2}{d\eta_i}\,\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{d\eta_i}}\right)\frac{\mathrm{F}(x)}{f_2(x,\eta_i)}\ \text{non}=0.$$

Soit maintenant h l'indice de η dans le facteur du produit (4) qui s'évanouit pour $x=\alpha$; m_1-1 termes de la somme (8) contiennent $f_2(x,\eta_h)$ et sont nuls; donc le terme restant,

$$(9)\qquad \left(\frac{df_2}{dx}-\frac{df_2}{d\eta_h}\,\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{d\eta_h}}\right)\frac{\mathrm{F}(x)}{f_2(x,\eta_h)},$$

ne peut l'être non plus que les quantités

$$f_2(x,\eta_1),\ldots,\quad f_2(x,\eta_{h-1}),\quad f_2(x,\eta_{h+1}),\ldots,\quad f_2(x,\eta_{m_1});$$

donc, enfin, la valeur β de η_h pour $x=\alpha$ est la seule qui, associée à α, fournisse un couple de solutions des équations proposées.

Quand α est une racine double, on a, pour $x=\alpha$,

$$\mathrm{F}(x)=0,\quad \mathrm{F}'(x)=0,\quad \mathrm{F}''(x)\ \text{non}=0.$$

Ici les quantités (8) et (9) s'évanouissent. On en conclut immédiate-

ment que, outre $f_2(x, \eta_h)$, un autre facteur du produit (4), $f_2(x, \eta_k)$, doit se réduire à zéro; car la quantité $\left(\frac{df_2}{dx} - \frac{df_2}{d\eta_k}\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{d\eta_k}}\right)$ prend la valeur

$$-\begin{vmatrix} \frac{df_1}{d\alpha}, & \frac{df_1}{d\beta} \\ \frac{df_2}{d\alpha}, & \frac{df_2}{d\beta} \end{vmatrix} : \frac{df_1}{d\beta},$$

qui ne peut être nulle en vertu de l'hypothèse; d'ailleurs, η_k prend pour la même raison une valeur distincte de β.

Mais la dérivée seconde,

$$\sum_{i=1}^{i=m_1} \frac{d^2 f_2(x,\eta_i)}{dx^2}\frac{\mathrm{F}(x)}{f_2(x,\eta_i)} + \sum_{i=1}^{i=m_1}\sum_{j=1}^{j=m_1} \frac{df_2(x,\eta_i)}{dx}\frac{df_2(x,\eta_j)}{dx}\frac{\mathrm{F}(x)}{f_2(x,\eta_i)f_2(x,\eta_j)},$$

ne peut devenir zéro. Or, tous les termes de la somme simple contiennent un facteur infiniment petit et aussi ceux de la somme double, sauf celui où η a les indices h et k; donc ce dernier ne peut s'évanouir, et, à part $f_2(x, \eta_h)$, $f_2(x, \eta_k)$, aucun facteur du produit (4) ne peut se réduire à zéro : ainsi, la solution α fait partie de deux couples seulement. On raisonnera de même pour une racine triple, etc.

Supposons, en second lieu, que quelques-unes des quantités $\frac{df_1(x,\eta)}{d\eta}$ s'évanouissent pour $x = \alpha$, l'équation (1) offre alors un ou plusieurs groupes de racines égales, et les fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_{m_1}$ prennent les valeurs des quantités inégales $\varphi, \chi, \ldots$ dont le nombre est inférieur à m_1.

Nommons $p, q, \ldots$ les nombres de celles respectivement égales à $\varphi, \chi, \ldots$; pour une valeur de x infiniment voisine de α, les racines η, infiniment voisines de φ, se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires (*Recherches sur les fonctions algébriques*, par M. Puiseux, *Journal de M. Liouville*, 1^re^ série, t. XV) tels, que les racines d'un même système sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives des diverses valeurs de $(x-\alpha)^{\frac{1}{s}}$, s étant le nombre des termes du système. Une fonction entière quelconque de x

et η, $f_2(x,\eta)$, par exemple, jouit aussi de la même propriété, et les développements des diverses valeurs obtenues pour cette fonction, en prenant successivement pour η les divers termes du système circulaire s, se formeront en remplaçant dans l'un d'eux $(x-\alpha)^{\frac{1}{s}}$ par les s valeurs de ce radical. D'où l'on conclut sans peine que le produit des s valeurs de $f_2(x,\eta)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-\alpha$.

Un autre système circulaire relatif à φ donnera un second produit analogue au premier, et ainsi de suite; de sorte que le produit final P de tous les produits élémentaires correspondant aux divers systèmes circulaires relatifs à φ, c'est-à-dire le produit de toutes les valeurs que donnent à $f_2(x,\eta)$ les p valeurs de η infiniment voisines de φ, est développable suivant les puissances entières de $(x-\alpha)$. Donc les dérivées totales des divers ordres de P conservent toutes des valeurs finies pour $x=\alpha$; de même pour Q, etc.

Je dis maintenant que si $f_2(\alpha,\varphi)$ est nul, la dérivée première de P ne l'est pas; en effet, (α,φ) est un couple de solutions des équations proposées, et, comme on a $\frac{df_1(x,\eta)}{d\eta}=0$ pour $x=\alpha$, on ne peut avoir en même temps $\frac{df_1}{dx}=0$, car autrement le déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées s'évanouirait, contrairement à l'hypothèse, pour $x=\alpha$, $y=\varphi$. Il en résulte (*voir* le Mémoire de M. Puiseux) que les p racines η, qui se réduisent à φ, font partie d'un même système circulaire de p termes, et que l'ordre des différences infiniment petites $\eta-\varphi$, comparées à $x-\alpha$, est $\frac{1}{p}$. On aura donc

$$\eta=\varphi+A(x-\alpha)^{\frac{1}{p}}+T,$$

et par conséquent

$$f_2(x,\eta)=B(x-\alpha)^{\frac{1}{p}}+U.$$

T et U désignent des séries de termes proportionnels à des puissances de $(x-\alpha)^{\frac{1}{p}}$ supérieures à la première; A est une constante non $=0$ et

B une quantité égale à A $\left(\frac{df_2}{dy}\right)_{\substack{x=\alpha\\y=\rho}}$, et par suite différente de zéro, car le déterminant des dérivées partielles, qui se réduit ici à $\left[\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy}\right]_{\substack{x=\alpha\\y=\rho}}$, ne peut s'évanouir. Il n'y a pas de terme constant, puisque $f_2(x, \eta)$ est nul pour $x = \alpha$.

En faisant donc le produit des p valeurs de $f_2(x, \eta)$, on trouvera

$$P = -(-1)^p B^p (x-\alpha) + V,$$

V étant une série de termes contenant des puissances entières de $x - \alpha$ supérieures à la première, et, par conséquent,

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{x=\alpha} = -(-1)^p B^p \text{ non } = 0\ (^*).$$

Ainsi le produit (4) se partage, dans le cas présent, en facteurs P, Q,... jouissant précisément des propriétés des facteurs élémentaires $f_2(x, \eta)$ qui ont servi de base à l'examen du premier cas. Les valeurs-limites de η, qui entrent dans l'un, diffèrent de toutes celles qui entrent dans les autres; leurs dérivées des divers ordres conservent des valeurs finies, et jamais leurs dérivées premières ne s'évanouissent en même temps qu'eux. En raisonnant donc comme ci-dessus, on arrivera au résultat qu'il s'agissait d'établir.

II. *Le degré de l'équation* (5), *et par conséquent la somme des degrés de multiplicité de ses diverses racines, est égal à* $m_1 m_2$.

Nous allons reconnaître en effet que, pour x infini, le rapport $\frac{F(x)}{x^{m_1 m_2}}$ converge vers une limite finie différente de zéro. Dans cette hypothèse, la quantité $\frac{\eta}{x}$ converge toujours vers une certaine limite ρ, car le coefficient de y^{m_1} dans l'équation (1) n'est pas nul; de plus, le groupe principal de cette équation s'évanouit pour $x = 1$, $y = \rho$. Le rapport

(*) M. Puiseux a écarté de ses recherches les fonctions algébriques provenant d'équations non irréductibles; mais on peut aisément s'assurer que cette restriction n'altère pas l'exactitude de nos conclusions.

$\frac{f_1(x, \eta)}{x^{m_1}}$ converge évidemment vers le résultat de la substitution de 1 et ρ à x et y dans le groupe principal de l'équation (2); or cette limite ne peut être nulle, car autrement les deux groupes principaux s'évanouiraient en même temps pour les valeurs non toutes deux égales à o : $x=1$, $y=\rho$. Donc, ce rapport et les m_1-1 analogues ont des limites finies qui ne sont pas nulles non plus que leur produit.

6. Ces développements me paraissent nécessaires pour fixer le sens du théorème de Bezout, dont l'exposition ordinaire laisse évidemment beaucoup à désirer. Je passe à la démonstration d'un théorème indispensable à nos recherches, et d'ailleurs extrêmement important en lui-même. Il s'appuie sur le lemme suivant :

Soit $\varphi(x, y)$ *une fonction entière n'admettant aucun facteur entier variable de degré inférieur au sien, ou dont les facteurs premiers sont tous différents; soit encore* $\Phi(x, y)$ *une autre fonction entière quelconque. Si toutes les solutions finies de l'équation*

$$\varphi(x, y)=0$$

vérifient la suivante :

$$\Phi(x, y)=0, \tag{10}$$

on aura identiquement

$$\Phi(x, y)=Q\varphi(x, y), \tag{11}$$

où Q *est une autre fonction entière.*

Si $\varphi(x, y)$ est une fonction première, ordonnons-la par rapport à y et nommons A le coefficient de la plus haute puissance de cette variable, qui est généralement un polynôme en x. L'équation

$$\frac{\varphi(x, y)}{A}=0, \tag{12}$$

considérée comme liant l'inconnue y au paramètre x, est évidemment irréductible. Son premier terme a pour coefficient l'unité, et ses racines, qui sont nécessairement finies quand on n'a pas $A=0$, vérifient toutes l'équation (10). Donc le premier membre de cette dernière est

divisible par celui de l'équation (12), et le quotient Q' est une fonction entière par rapport à y et aussi par rapport à x; au moins les coefficients de y ne peuvent-ils contenir des fractions ayant d'autres dénominateurs que A ou des facteurs de A. On a donc

$$(13) \qquad \Phi(x, y) = \frac{Q'}{A} \varphi(x, y),$$

pour toutes les valeurs de y et pour toutes celles de x qui ne réduisent pas A à zéro. Nommons a une racine de

$$(14) \qquad A = 0,$$

b une valeur de y qui ne vérifie pas l'équation

$$\varphi(a, y) = 0,$$

et après avoir fait $y = b$ dans (13), faisons converger x vers a. Le premier membre a pour limite $\Phi(a, b)$; le dernier facteur du second tend vers la limite différente de zéro $\varphi(a, b)$, donc $\frac{Q'}{A}$ converge vers une limite finie. Comme la quantité b peut être choisie d'une infinité de manières, chacun des coefficients des puissances de y dans $\frac{Q'}{A}$ converge aussi vers une limite finie, et il en est de même relativement à toute autre racine de l'équation (14). D'où l'on conclut sans peine la possibilité d'effectuer dans $\frac{Q'}{A}$ des réductions propres à faire disparaître tous les dénominateurs. C'est ce qu'il fallait établir.

Quand $\varphi(x, y)$ est un produit de facteurs premiers différents φ_1 $\varphi_2 \ldots$, on ne peut avoir $\varphi_1 = 0$ sans avoir en même temps $\varphi = 0$, et, par suite, $\Phi = 0$; donc on aura, par ce qui précède,

$$(15) \qquad \Phi = Q_1 \varphi_1.$$

Les solutions finies de l'équation

$$\varphi_2 = 0$$

ne peuvent toutes annuler φ_1, sans quoi φ_1 serait divisible par φ_2, et

par conséquent cette fonction serait ou composée, ou égale à φ_2, contrairement à ce que nous avons supposé. Il en résulte que les solutions de l'équation précédente qui n'annulent pas φ_1 réduisent à zéro Φ, et même, en vertu de l'équation (15), Q_1; mais cette fonction est continue, donc elle s'évanouit même pour les valeurs des variables qui annulent φ_1 et φ_2 à la fois, et on aura, comme nous l'avons prouvé tout à l'heure,

$$Q_1 = Q_2\varphi_2,$$

puis, de même,

$$Q_2 = Q_3\varphi_3,$$
$$\dots\dots\dots,$$

d'où l'on tire en définitive

$$\Phi = Q\varphi_1\varphi_2\dots = Q\varphi,$$

$Q_2, Q_3, \dots, Q$ étant toutes des fonctions entières.

7. Théorème fondamental. — *Si les équations données*

$$(a) \qquad \begin{cases} (1) & f_1(x, y) = 0, \\ (2) & f_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

sont soumises aux conditions ci-dessus posées, et qui consistent en ce que 1° *leurs groupes principaux sont disjoints;* 2° *leurs couples de solutions sont tous simples, toute fonction entière* F (x, y) *des variables indépendantes* x, y *qui s'évanouit pour tous leurs couples de solutions est liée à leurs premiers membres par la relation*

$$(16) \qquad F = P_1 f_1 + P_2 f_2,$$

où P_1, P_2 *sont des fonctions entières.*

Et si μ, μ_1, μ_2 *désignent les degrés des trois fonctions* F, P_1, P_2, *on peut supposer en même temps ou*

$$(17) \qquad \mu_1 = \mu - m_1, \quad \mu_2 \gtreqless \mu - m_2,$$

ou

$$(18) \qquad \mu_1 \gtreqless \mu - m_1, \quad \mu_2 = \mu - m_2.$$

Comme nous l'avons reconnu (n° 2), l'équation (1) peut être supposée du degré m_1 par rapport à y et ne fournir que des racines finies quand on la résout par rapport à cette inconnue, en considérant l'autre comme une variable indépendante. Nommons η une quelconque des racines; le rapport

$$(19)\qquad \frac{F(x,\eta)}{f_1(x,\eta)},$$

étant une fonction rationnelle d'une racine de l'équation (1) et du paramètre x, est équivalent à une autre fonction rationnelle $\Phi_2(x,\eta)$ des mêmes quantités, mais entière par rapport à η, et d'un degré inférieur au moins d'une unité à m_1 degré de η dans l'équation (1). (*Voir*, pour la démonstration bien connue de cette proposition d'analyse algébrique, le *Cours d'Algèbre supérieure*, par M. J.-A. Serret, 2e édition, p. 38 et suiv.).

Comme η reste finie pour toutes les valeurs finies de x, la fonction Φ_2 jouit de la même propriété, sauf peut-être pour des valeurs correspondantes de x, η appartenant à un même couple de solutions (α, β) des équations simultanées (a), et qui réduisent à zéro le dénominateur f_2. Mais on peut s'assurer que le rapport (19) conserve dans ce cas même une valeur finie; il suffit d'observer que son numérateur F s'évanouit lui-même par hypothèse, et de chercher ensuite, à l'aide des procédés ordinaires du calcul différentiel, la limite vers laquelle il converge quand x tend vers α et η vers β.

Si $\left(\frac{df_1}{dy}\right)_{\substack{x=\alpha\\ x=\beta}}$ n'est pas nulle, les dérivées totales des deux termes par rapport à x prennent pour $x=\alpha$ les valeurs finies

$$\begin{vmatrix} \frac{dF(\alpha,\beta)}{d\alpha} & \frac{dF(\alpha,\beta)}{d\beta} \\ \frac{df_1(\alpha,\beta)}{d\alpha} & \frac{df_1(\alpha,\beta)}{d\beta} \end{vmatrix} : \frac{df_1(\alpha,\beta)}{d\beta}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{df_2(\alpha,\beta)}{d\alpha} & \frac{df_2(\alpha,\beta)}{d\beta} \\ \frac{df_1(\alpha,\beta)}{d\alpha} & \frac{df_1(\alpha,\beta)}{d\beta} \end{vmatrix} : \frac{df_1(\alpha,\beta)}{d\beta},$$

et la dernière ne peut être nulle, car elle est proportionnelle au déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées qui n'admettent que des couples de solutions simples (n° 3).

Donc, la valeur cherchée de l'expression (19) se réduit au rapport de ces dérivées, et par suite à une quantité finie.

Quand $\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta}$ est nulle, on arrive au même résultat en changeant de variables. Nommons p, q, r, s quatre constantes dont le déterminant $(ps - qr)$ ne soit pas nul, et posons

$$x = px' + q\eta', \quad \eta = rx' + s\eta';$$
$$\alpha = p\alpha' + q\beta', \quad \beta = r\alpha' + s\beta';$$

α', β' sont des quantités finies vérifiant les équations simultanées

$$(a') \qquad \begin{cases} f_1(px' + qy', rx' + sy') = f'_1(x', y') = 0, \\ f_2(px' + qy', rx' + sy') = f'_2(x', y') = 0; \end{cases}$$

les variables x', η', dont la seconde est fonction de la première, sont liées par l'équation

$$f'_1(x', \eta') = 0,$$

et le rapport (19) devient

$$\frac{F'(x', \eta')}{f'_2(x', \eta')}.$$

Nous avons à chercher sa valeur pour $x' = \alpha'$, $\eta' = \beta'$; on trouvera aisément

$$\begin{vmatrix} \frac{df'_1}{dx'} & \frac{df'_1}{dy'} \\ \frac{df'_2}{dx'} & \frac{df'_2}{dy'} \end{vmatrix}_{\substack{x'=\alpha' \\ y'=\beta'}} = (ps - qr) \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} \text{non} = 0$$

et

$$\frac{df'_2(x', \eta')}{dx'} = \begin{vmatrix} \frac{df'_2}{dx'} & \frac{df'_2}{dy'} \\ \frac{df'_1}{dx'} & \frac{df'_1}{dy'} \end{vmatrix} : \frac{df'_1}{dy'}.$$

Donc, l'hypothèse $x' = \alpha'$ rendra comme ci-dessus la dérivée du dénominateur du nouveau rapport égale à une quantité finie différente de zéro, si l'on a

$$\left(\frac{df'_1}{dy'}\right)_{\substack{x'=\alpha' \\ y'=\beta'}} \text{non} = 0;$$

C'est ce qui a toujours lieu quand on prend q non $= 0$, comme il est permis de le faire, car

$$\frac{df_1(\alpha', \beta')}{d\beta'} = q\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha} + s\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta} = q\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha},$$

et $\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha}$ ne peut s'évanouir, sans quoi le déterminant des dérivées partielles s'évanouirait lui-même, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, la fonction $\Phi_2(x, \eta)$ conserve une valeur finie pour toute valeur finie de x; à présent, il est facile de prouver qu'elle est aussi entière par rapport à cette variable. En l'ordonnant suivant les puissances de η, on obtiendra

$$\Phi_2(x, \eta) = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \ldots + A_{m_1-1}\eta^{m_1-1},$$

A_0, $A_1, \ldots, A_{m_1-1}$ étant des fonctions rationnelles de x; et, en remplaçant η successivement par les m_1 racines de l'équation (1), on trouvera les m_1 équations linéaires

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_2(x, \eta_1) = A_0 + A_1\eta_1 + \ldots + A_{m_1-1}\eta_1^{m_1-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_2(x, \eta_{m_1}) = A_0 + A_1\eta_{m_1} + \ldots + A_{m_1-1}\eta_{m_1}^{m_1-1}, \end{array}\right.$$

d'où nous allons tirer les valeurs des quantités A, qui correspondent à une même valeur de x.

Les formules de Cramer donnent

$$A_j = \frac{\Sigma k_{i,j}\Phi_2(x, \eta_i)}{\Delta},$$

où k désigne une fonction entière des quantités η, et Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \ldots & \eta_1^{m_1-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 \ldots & \eta_2^{m_1-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \eta_{m_1} & \eta_{m_1}^2 \ldots & \eta_{m_1}^{m_1-1} \end{vmatrix}.$$

Le numérateur de A_j est toujours fini, puisque les valeurs de η et de $\Phi_2(x, \eta)$ le sont elles-mêmes. Le dénominateur ne peut être nul que si quelques-unes des quantités η sont numériquement égales pour la valeur de x considérée. En effet, on déduit successivement des pro-

priétés élémentaires des déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \dots & \eta_1^{m_1-1} \\ 0 & \eta_2-\eta_1 & \eta_2^2-\eta_1^2\dots & \eta_2^{m_1-1}-\eta_1^{m_1-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \eta_{m_1}-\eta_1 & \eta_{m_1}^2-\eta_1^2\dots & \eta_{m_1}^{m_1-1}-\eta_1^{m_1-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\eta_2-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)\dots(\eta_{m_1}-\eta_1) \begin{vmatrix} 1 & \eta_2+\eta_1 & \eta_2^2+\eta_2\eta_1+\eta_1^2\dots & \eta_2^{m_1-2}+\eta_2^{m_1-3}\eta_1+\dots+\eta_1^{m_1-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \eta_{m_1}+\eta_1 & \eta_{m_1}^2+\eta_{m_1}\eta_1+\eta_1^2\dots & \eta_{m_1}^{m_1-2}+\eta_{m_1}^{m_1-3}\eta_1+\dots+\eta_1^{m_1-2} \end{vmatrix}$$

$$= (\eta_2-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)\dots(\eta_{m_1}-\eta_1) \begin{vmatrix} 1 & \eta_2 & \eta_2^2\dots & \eta_2^{m_1-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \eta_{m_1} & \eta_{m_1}^2\dots & \eta_{m_1}^{m_1-2} \end{vmatrix},$$

et, par suite,

$$\Delta = (\eta_2-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)\dots(\eta_{m_1}-\eta_1)(\eta_3-\eta_2)\dots(\eta_{m_1}-\eta_2)\dots(\eta_{m_1}-\eta_{m_1-1}).$$

Donc, ce cas excepté, la valeur de A_j est nécessairement finie pour toute valeur finie de x; cette fonction de x est donc entière, puisque nous savons d'autre part qu'elle est rationnelle.

Quand plusieurs des quantités $\eta_1, \dots, \eta_{m_1}$ deviennent égales, quelques-unes des équations (20) deviennent identiques, et le système entier ne suffit plus à la détermination des valeurs de $A_0, \dots, A_{m_1}$. Mais il existe alors entre ces quantités d'autres équations linéaires qui se déduisent des équations devenues inutiles par des différentiations relatives à η, et qui, jointes à celles que l'on doit conserver, donnent un déterminant non $= 0$, dont la considération conduit au même résultat. Que l'on ait par exemple $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_k$, $\eta_1, \eta_{k+1}, \dots, \eta_{m_1}$ étant toutes inégales; on aura évidemment non-seulement

$$\Phi_2(x, \eta_1) = A_0 + A_1\eta_1 + \dots + A_{m_1-1}\eta_1^{m_1-1},$$

mais encore les $k-1$ équations

$$\frac{d\Phi_2(x,\eta_1)}{d\eta_1} = A_1 + A_2 2\eta_1 + \dots + A_{m_1-1}(m_1-1)\eta_1^{m_1-2},$$

$$\frac{d^2\Phi_2(x,\eta_1)}{d\eta_1^2} = A_2 2 + \dots + A_{m_1-1}(m_1-1)(m_1-2)\eta_1^{m_1-3},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^{k-1}\Phi_2(x,\eta_1)}{d\eta_1^{k-1}} = \dots + A_{m_1-1}(m_1-1)\dots(m_1-k+1)\eta_1^{m_1-k},$$

qu'on devra substituer dans le système (20) aux $k-1$ qui suivent la première. Le déterminant Δ' du nouveau système est donc égal à

$$\frac{d^{k-1}}{d\eta_k^{k-1}}\frac{d^{k-2}}{d\eta_{k-1}^{k-2}}\cdots\frac{d}{d\eta_2}\Delta,$$

pourvu que les différentiations soient commencées par la droite, et qu'après chacune d'elles la variable η, à laquelle elle se rapporte, soit remplacée par η_1. On trouve, par un calcul très-simple,

$$\begin{aligned}\Delta' = 1.\overline{1.2}.\overline{1.2.3}\ldots\overline{1.2\ldots k-1}\,[(\eta_{k+1}-\eta_1)(\eta_{k+2}-\eta_1)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_1)]^k \\ \times(\eta_{k+2}-\eta_{k+1})\ldots(\eta_{m_1}-\eta_{k+1})\ldots(\eta_{m_1}-\eta_{m_1-1});\end{aligned}$$

Δ' n'est donc pas nul.

En raisonnant de même quand il y a plusieurs groupes de quantités égales dans les racines η, on arrive à un déterminant proportionnel à un produit de puissances de différences de quantités inégales, et partant non $=0$. Ainsi, dans tous les cas, les quantités $A_0, \ldots, A_{m_1-1}$ sont finies en même temps que x, et $\Phi_2(x, \eta)$ est une fonction entière aussi bien par rapport à x que par rapport à η.

Considérons maintenant la fonction entière

$$F(x, y) - \Phi_2(x, y) f_2(x, y); \tag{21}$$

elle s'évanouit quand on remplace y par une des racines η, c'est-à-dire pour tous les couples de solutions finies de l'équation (1); d'ailleurs, le premier membre de cette équation ne peut contenir plus d'une fois le même facteur premier; car, si on avait

$$f_1 = H^2 K,$$

H, K étant deux fonctions entières, on aurait aussi

$$g_1 = h^2 k,$$

g_1, h, k désignant les groupes principaux de ces trois polynômes. Comme g_1 et le groupe principal de f_2 ne peuvent s'évanouir ensemble que pour $x = y = 0$, il en serait de même pour h^2 et ce même groupe, c'est-à-dire que les groupes principaux de f_2, H^2 seraient disjoints, et les équations simultanées

$$H^2 = 0, \quad f_2 = 0$$

auraient au moins (nos 2 et 5, II) un couple de solutions finies (α, β), qui appartiendrait aussi aux équations (a). Mais on trouverait pour $x=\alpha, y=\beta$,

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 2\mathrm{HK} \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{H}}{dx} & \frac{d\mathrm{H}}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} + \mathrm{H}^2 \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{K}}{dx} & \frac{d\mathrm{K}}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 0,$$

et, contrairement à l'hypothèse, les équations proposées admettraient au moins un couple de racines multiples. Donc, en vertu du lemme ci-dessus démontré, la fonction (21), divisée par $f_1(x, y)$, donne un certain quotient entier $\Phi_1(x, y)$, et l'on a

$$\mathrm{F} = \Phi_1 f_1 + \Phi_2 f_2; \tag{22}$$

c'est le premier point qu'il fallait établir.

Appelons μ'_1, μ'_2 les degrés de Φ_1, Φ_2, et, comme nous l'avons fait, μ celui de F; si les sommes $\mu'_1 + m_1$, $\mu'_2 + m_2$ sont inégales, la plus grande est nécessairement égale à μ, car elle mesure le degré du second membre de l'équation (22), et par conséquent celui du premier. On a donc, soit

$$\mu'_1 = \mu - m_1, \quad \mu'_2 < \mu - m_2,$$

soit

$$\mu'_1 < \mu - m_1, \quad \mu'_2 = \mu - m_2.$$

Si au contraire ces sommes sont égales et si leur valeur commune ne surpasse pas μ, on a évidemment

$$\mu'_1 = \mu - m_1, \quad \mu'_2 = \mu - m_2;$$

mais cette valeur commune peut surpasser μ, car rien n'empêche que dans la réduction du second membre de (22) à un polynôme ordonné suivant les puissances des variables, les termes de degrés supérieurs à μ ne se détruisent mutuellement. Soient alors φ_1, φ_2 les groupes principaux de Φ_1, Φ_2 et g_1, g_2 ceux de f_1, f_2; l'ensemble des termes de degré $\mu'_1 + m_1$ ou $\mu'_2 + m_2$ dans le second membre de (22) développé sera $\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2$; mais cette quantité est identiquement nulle, car le degré du second membre ne peut surpasser celui du premier. De la relation

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 = 0$$

on tire

$$\varphi_1 = -\frac{\varphi_2 g_2}{g_1}.$$

Les polynômes homogènes g_1, g_2 sont décomposables en facteurs du premier degré, et il est visible qu'aucun facteur $rx+sy$ de g_1 ne peut diviser g_2, car en appelant k une quantité différente de zéro, les valeurs

$$x = ks, \quad y = -kr,$$

qui ne peuvent être toutes deux égales à zéro, annulant $rx+sy$, annuleraient aussi à la fois g_1 et g_2, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc g_1, premier à g_2, divise φ_2, et l'on a

$$\varphi_2 = \theta g_1, \tag{23}$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1 = -\theta g_2, \tag{24}$$

θ désignant un polynôme homogène de degré $\mu'_2 - m_1 = \mu'_1 - m_2$. Ajoutons membre à membre l'équation (22) et l'identité

$$0 = \theta f_2 . f_1 - \theta f_1 . f_2,$$

il viendra

$$\mathrm{F} = (\Phi_1 + \theta f_2) f_1 + (\Phi_2 - \theta f_1) f_2,$$

et les fonctions qui multiplient f_1, f_2 ne sont plus que des degrés $\mu'_1 - 1$, $\mu'_2 - 1$, au plus, car leurs termes de degrés μ'_1, μ'_2 se détruisent réciproquement en vertu des relations (23), (24).

En raisonnant comme tout à l'heure ou en employant cette méthode de réduction selon le cas, on arrivera évidemment toujours à trouver, pour les multiplicateurs de f_1, f_2 dans la formule (22), des fonctions entières P_1, P_2 dont les degrés μ_1, μ_2 vérifient l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités (17), (18), car la plus grande des sommes $\mu_1 + m_1$, $\mu_2 + m_2$ ne peut s'abaisser au-dessous de μ (*).

(*) Il est aisé d'obtenir les solutions entières de l'équation indéterminée

$$f_1 \Phi_1 + f_2 \Phi_2 = \mathrm{F}$$

8. Occupons-nous à présent des sommes des puissances semblables des solutions des équations (a). Nous avons vu (n° 3) qu'en appelant

---

entre les fonctions inconnues Φ_1, Φ_2. Comme on a

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 = F,$$

on aura aussi

$$f_1 (\Phi_1 - P_1) + f_2 (\Phi_2 - P_2) = 0;$$

d'où

$$\Phi_1 - P_1 = -\frac{f_2(\Phi_2 - P_2)}{f_1}.$$

Or f_1 et f_2 ne peuvent avoir aucun facteur entier commun, car autrement leurs groupes principaux ne seraient pas disjoints; donc

$$\Phi_2 = P_2 + \Theta f_1,$$

et par suite

$$\Phi_1 = P_1 - \Theta f_2;$$

Θ désignant une fonction entière.

Les fonctions données par ces formules sont évidemment les plus générales qui vérifient l'équation indéterminée, si l'on prend pour Θ une fonction entière arbitraire.

Quand Θ est un polynôme de degré fixe à coefficients variables, l'équation

$$\Phi_1 = 0$$

représente une courbe variable de degré déterminé passant par les points communs aux deux courbes

$$P_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

de même l'équation

$$\Phi_2 = 0$$

correspond à un faisceau de courbes ayant pour sommets les points d'intersection des courbes

$$P_2 = 0, \quad f_1 = 0,$$

et le lieu des intersections des éléments correspondants des faisceaux (Φ_1), (Φ_2) est la courbe

$$F = 0.$$

Aussi, *pour obtenir un mode de génération d'une courbe algébrique par les intersections mutuelles de deux faisceaux de courbes variables, il suffit de connaître deux courbes fixes dont tous les points d'intersection appartiennent à la proposée*. Cette remarque peut être fort utile en géométrie; en particulier elle conduit tout naturellement aux nouvelles générations trouvées par M. Chasles pour les courbes du troisième et du quatrième degré.

Il est bon d'observer en passant que les limites inférieures des degrés de P_1, P_2, que nous avons trouvées tout à l'heure, n'existeraient pas nécessairement si f_1, f_2 n'avaient pas leurs groupes principaux disjoints. En prenant, par exemple, pour Θ une fonction d'un degré suffisamment élevé, on peut rendre les degrés de Φ_1, Φ_2 bien supérieurs à μ, et F sera décomposée

(α, β) un couple de solutions et posant

$$f_1 = p_1(x-\alpha) + q_1(y-\beta),$$
$$f_2 = p_2(x-\alpha) + q_2(y-\beta),$$

---

en la somme des produits de Φ_1, Φ_2 par des fonctions entières f_1, f_2 dont les degrés ne peuvent être abaissés au-dessous des différences entre celui de F et ceux de Φ_1, Φ_2 puisqu'elles sont négatives. Il est évident que les groupes principaux de Φ_1, Φ_2 ne sont pas disjoints.

Cette proposition, que je démontre ici pour en faire un usage fort restreint, a lieu pour des fonctions entières à un nombre quelconque de variables; on l'établirait sans peine en suivant notre méthode. Je n'ose pas encore m'en attribuer la découverte, bien que je ne l'aie pas encore vue énoncée, encore moins démontrée généralement. Elle me paraît être d'une importance capitale dans la doctrine des expressions à plusieurs variables ou inconnues simultanées, où elle joue le même rôle que la suivante dans la théorie des équations à une seule inconnue : *Quand une équation entière admet toutes les racines d'une autre équation qui n'en a point de multiples, son premier membre est divisible par celui de cette autre.*

J'en citerai les applications suivantes, qui se présentent d'elles-mêmes :

1° *Si deux courbes algébriques de degré m, m_1 ont $m_1 m_2$ points d'intersection sur une courbe de degré m_2, les $m_1(m-m_2)$ autres sont sur une même autre courbe de degré $m-m_2$.* En effet, les $m_1 m_2$ points d'intersection des courbes (m_1), (m_2) sont tous sur la courbe (m); donc, en appelant f, f_1, f_2, les premiers membres des équations des courbes proposées, on a

$$f = p_1 f_1 + p_2 f_2,$$

où p_1, p_2 sont des polynômes entiers. Donc, les points communs aux courbes f_1, f qui n'appartiennent pas à f_2, il y en a $m_1(m-m_2)$, sont situés sur la courbe $p_2 = 0$, dont le degré, comme nous l'avons reconnu, est généralement égal à $m-m_2$.

Exemple. — *Quand deux courbes du troisième degré ont six points d'intersection sur une conique, les trois autres sont en ligne droite.* On établit ordinairement cette proposition par une méthode toute différente.

2° Le premier membre F de l'équation de degré $m_1 m_2$ qui a pour racines les valeurs d'une même inconnue dans les couples de solution des équations (a) peut évidemment être considéré comme une fonction des variables x, y (bien qu'elle n'en contienne qu'une seule) qui s'évanouit pour tous les couples de solutions des équations proposées. On a donc, en vertu de notre théorème fondamental,

$$F = p_1 f_1 + p_2 f_2$$

p_1 et p_2 étant des fonctions entières. Donc, *on peut toujours éliminer une des variables en ajoutant membre à membre les équations proposées multipliées par des polynômes entiers convenablement choisis.*

Quand les équations simultanées ne satisfont pas aux conditions posées, le théorème fondamental a toujours lieu, mais avec des modifications dans l'énoncé que je n'examinerai pas en ce moment.

où p_1, q_1, p_2, q_2 sont des fonctions entières de x, y et aussi de α, β, le déterminant

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}$$

jouit de la double propriété :

1° De s'évanouir quand on prend pour x, y les éléments de tout couple de solutions autre que (α, β);

2° De prendre la même valeur que le déterminant

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

pour $x = \alpha$, $y = \beta$. Il en résulte que si on calcule les $m_1 m_2$ déterminants semblables à (25) en considérant successivement les $m_1 m_2$ couples de solutions des équations proposées, leur somme prend la même valeur que l'expression (26) chaque fois que x, y reçoivent les valeurs d'un couple de solutions. Donc la différence

$$\sum \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

s'évanouit pour toutes les valeurs de x, y propres à vérifier les équations proposées, et en vertu du théorème fondamental on a, quelles que soient x, y,

$$(27) \qquad \sum \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2,$$

φ_1, φ_2 étant deux fonctions entières des variables. C'est l'identité d'où nous allons tirer les formules de Newton pour les équations simultanées.

Il résulte du mode de formation de p_1, q_1 que ces quantités sont des fonctions entières de $(x - \alpha)$, $(y - \beta)$ de degré $m_1 - 1$, et si on développe les puissances et produits de ces différences, elles deviendront des

fonctions entières de x, y, α, β de degré $m_1 - 1$ par rapport à x, y, et aussi par rapport à α, β; de même, p_2 et q_2 se transforment en des fonctions entières de degré $m_2 - 1$ par rapport à x, y et α, β. Donc les déterminants semblables à (25) sont du degré $m_1 + m_2 - 2 = \mu$ par rapport, soit à x, y, soit à α, β, et leur somme est une fonction de degré μ en x, y dont les coefficients sont des fonctions linéaires des sommes symétriques

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_0 = m_1 m_2, \\ \sum \alpha, \sum \beta, \\ \sum \alpha^2, \sum \alpha\beta, \sum \beta^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum \alpha^\mu, \sum \alpha^{\mu-1}\beta, \ldots, \sum \alpha\beta^{\mu-1}, \sum \beta^\mu, \end{array}\right.$$

dont le nombre est

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \mu + 1 = \frac{(\mu+2)(\mu+1)}{1.2}.$$

Le déterminant des dérivées partielles étant lui-même du degré μ, le premier membre de l'équation (27) est aussi du même degré, et, comme on l'a vu (n° 7), on pourra supposer ou que le degré de φ_1 est égal à $\mu - m_1$, et celui de $\varphi_2 \overset{=}{<} \mu - m_2$, ou que le premier est $< \mu - m_1$ et le second $= \mu - m_2$. On pourra donc toujours représenter φ_1, φ_2 par des fonctions entières des degrés $\mu - m_1 = m_2 - 2$, $\mu - m_2 = m_1 - 2$ à coefficients indéterminés dont quelques-uns seront pris égaux à zéro, si l'un des degrés de φ_1 et φ_2 est au-dessous de sa valeur naturelle.

En ordonnant les deux membres de l'équation (27) par rapport aux puissances et produits de x, y, et égalant les coefficients des termes semblables, on obtiendra $\frac{(\mu+2)(\mu+1)}{1.2}$ équations qui contiennent linéairement les sommes inconnues (28) et les coefficients également inconnus des fonctions φ_1, φ_2.

Le nombre des coefficients de φ_1 est

$$1 + 2 + \ldots + m_2 - 1 = \frac{m_2(m_2-1)}{1.2},$$

celui des coefficients de φ_2 est pareillement $\frac{m_1(m_1-1)}{1.2}$, et par suite le nombre total des inconnues s'élève à

$$\frac{(\mu+2)(\mu+1)}{1.2}+\frac{m_1(m_1-1)}{1.2}+\frac{m_2(m_2-1)}{1.2}.$$

Les équations linéaires dont il s'agit et que nous désignerons, pour abréger, par le signe (p, q), ne suffisent donc pas pour déterminer les sommes cherchées, puisque leur nombre est inférieur à celui de toutes les quantités inconnues.

Mais on remarquera qu'en faisant $x=\alpha, y=\beta$ dans l'équation (1), puis les multipliant successivement par les $\frac{m_2(m_2-1)}{1.2}$ quantités

$$\begin{array}{c} 1 \\ \alpha,\quad \beta, \\ \alpha^2,\quad \alpha\beta,\quad \beta^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{m_2-2},\quad \alpha^{m_2-3}\beta\ldots,\quad \beta^{m_2-2}, \end{array}$$

et faisant la somme des résultats obtenus en remplaçant α, β par les $m_1 m_2$ couples de solutions, on obtient $\frac{m_2(m_2-1)}{1.2}$ nouvelles équations linéaires (s_1) entre les sommes (28); que, pareillement, on peut déduire de l'équation (2) $\frac{m_1(m_1-1)}{1.2}$ autres équations linéaires (s_2) entre les mêmes inconnues; par conséquent on a toujours, outre les équations (p, q), les deux systèmes (s_1), (s_2) qui complètent le nombre d'équations nécessaire au calcul de toutes les inconnues. D'ailleurs, les quantités connues de ces équations sont des fonctions entières des coefficients des équations proposées. *C'est donc l'ensemble des relations* (p, q), (s_1), (s_2) *qui représente les formules de Newton pour les équations simultanées binaires, car elles ramènent le calcul des sommes des puissances semblables des solutions à la résolution de simples équations linéaires.*

9. Les remarques suivantes éclairciront encore cette analyse :

1° Les fonctions entières p_1, q_1 ne sont pas déterminées d'une ma-

... absolue, car elles ne sont assujetties qu'à vérifier l'équation

$$\varpi_1(x-\alpha)+\chi_1(y-\beta)=f_1,$$

d'où l'on tire (*voir* la première note du n° 7)

$$\varpi_1=p_1+\theta_1(y-\beta),\quad \chi_1=q_1-\theta_1(x-\alpha),$$

θ_1 étant une fonction entière quelconque. De même, les valeurs les plus générales de p_2, q_2 sont

$$\varpi_2=p_2-\theta_2(y-\beta),\quad \chi_2=q_2+\theta_2(x-\alpha).$$

D'après cela, la forme la plus générale du déterminant (25) sera

$$\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}+\theta_1[p_2(x-\alpha)+q_2(y-\beta)]+\theta_2[p_1(x-\alpha)+q_1(y-\beta)]$$
$$=\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}+\theta_2 f_1+\theta_1 f_2,$$

et son introduction dans l'équation (27) ne change rien à nos conclusions; on trouvera seulement d'autres valeurs pour les coefficients des fonctions φ_1, φ_2.

Mais voici un résultat important : si on choisit θ_2, θ_1 de telle sorte que l'on ait

$$\sum\theta_2=\varphi_1,\quad \sum\theta_1=\varphi_2,$$

l'identité (27) devient

$$(29)\qquad \sum\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix};$$

elle offre alors l'analogie la plus frappante avec l'identité de Newton

$$\sum\frac{F(x)}{x-a}=F'(x).$$

Malheureusement il paraît difficile de déterminer *à priori* ce qu'il y a d'arbitraire dans les fonctions p_1, q_1, p_2, q_2, de manière à ramener l'identité (27) à la forme (29). On peut même se demander si, pour

une même équation, cette détermination est indépendante des coefficients de l'autre, c'est-à-dire si f_1 étant donnée, par exemple, p_1, q_1 auront les mêmes valeurs quelle que soit f_2, ce qui ne serait pas sans importance.

2° Pour calculer p_1, q_1, il n'est pas nécessaire d'employer le procédé (n° 3), qui exige l'application de la formule de Taylor, puis le développement ultérieur des puissances et produits de $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$. On peut former ces fonctions par une sorte de division algébrique à deux diviseurs, qui peut être considérée comme l'extension de cette opération élémentaire aux expressions binaires. Voici la disposition du calcul :

1er diviseur.	Dividende f_1.	2me diviseur.
$x-\alpha$	$t_{m_1}+t_{m_1-1}+t_{m_1-2}+\ldots$	$y-\beta$
1er quotient.	Dividendes partiels.	2me quotient.
$u_{m_1-1}+u_{m_1-2}+\ldots$	$\alpha u_{m_1-1}+\beta v_{m_1-1}+t_{m_1-1}$	$v_{m_1-1}+v_{m_1-2}+\ldots$
	$\alpha u_{m_1-2}+\beta v_{m_1-2}+t_{m_1-2}$	
	....	

$t_{m_1}, t_{m_1-1}, t_{m_1-2}\ldots$ représentent les groupes homogènes de degrés m_1, m_1-1, $m_1-2,\ldots$, dont f_1 est la somme. On *divise* celui de degré le plus élevé par x, y, c'est-à-dire que l'on cherche deux *quotients* u_{m_1-1}, v_{m_1-1} tels que l'on ait

$$x u_{m_1-1}+y v_{m_1-1}=t_{m_1}.$$

On multiplie ces quotients par α, β en changeant les signes. On écrit la somme des produits au-dessous du *dividende*, et on abaisse le groupe de degré m_1-1 ; on obtient ainsi un second dividende partiel, et ainsi de suite. Le *reste* a toujours la même valeur que $f_1(\alpha, \beta)$ et s'évanouit par conséquent : les *quotients* sont des valeurs de p_1, q_1.

Les divisions partielles peuvent évidemment être opérées d'une infinité de manières dont les combinaisons fournissent toutes les valeurs possibles de p_1, q_1 ; la plus simple en apparence consiste, en vertu de la propriété des fonctions homogènes, à prendre chaque quotient partiel égal à la dérivée par rapport à x ou y du dividende correspondant, divisée par le degré de celui-ci; l'algorithme est ainsi beaucoup simplifié.

On procédera de même pour obtenir p_2, q_2, et plus généralement pour trouver deux fonctions qui, multipliées respectivement par deux autres données, donnent deux produits dont la somme reconstitue une fonction donnée, pourvu toutefois que cette sorte de division soit possible en vertu de notre théorème fondamental.

En prenant les premiers quotients proportionnels aux dérivées des dividendes partiels correspondants, on trouve, pour le premier groupe du déterminant (25) ordonné :

$$\frac{1}{m_1 m_2}\begin{vmatrix} \frac{dt_{m_1}}{dx} & \frac{dt_{m_1}}{dy} \\ \frac{dt'_{m_2}}{dx} & \frac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix},$$

et pour celui de la somme de tous les déterminants semblables :

$$\frac{N}{m_1 m_2}\begin{vmatrix} \frac{dt_{m_1}}{dx} & \frac{dt_{m_1}}{dy} \\ \frac{dt'_{m_2}}{dx} & \frac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix};$$

t'_{m_2} désigne le groupe principal de l'équation (2) et N le nombre des couples de racines du système proposé. D'autre part, le premier groupe du déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées est :

$$\begin{vmatrix} \frac{dt_{m_1}}{dx} & \frac{dt_{m_1}}{dy} \\ \frac{dt'_{m_2}}{dx} & \frac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix}.$$

Maintenant, en égalant les groupes de degré μ dans les deux membres de la relation (27), et désignant par g_{m_2-2}, g'_{m_1-2} les groupes principaux de φ_1, φ_2, on obtient

$$(30)\qquad \left(\frac{N}{m_1 m_2} - 1\right)\begin{vmatrix} \frac{dt_{m_1}}{dx} & \frac{dt_{m_1}}{dy} \\ \frac{dt'_{m_2}}{dx} & \frac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix} = t_{m_1} g_{m_2-2} + t'_{m_2} g'_{m_1-2}.$$

Posons

$$y = rx;$$

r étant une racine de l'équation en $\frac{r}{x}$ de degré m_1,

$$\frac{t_{m_1}}{x_{m_1}} = 0;$$

la relation (30) devient

$$-m_2\left(\frac{\mathrm{N}}{m_1 m_2} - 1\right)\frac{1}{x}\frac{dt_{m_1}}{dy} = g'_{m_1-2},$$

et, par conséquent, après la division des deux membres par x^{m_1-2}, une équation en r de degré $m_1 - 1$ seulement; comme r est une racine quelconque d'une équation de degré m_1, il faut nécessairement que cette dernière équation soit identique, et, par suite, que le coefficient de r^{m_1-1}

$$-(\mathrm{N} - m_1 m_2)\tau,$$

τ désignant le coefficient de y^{m_1} dans t_1, soit nul. Or, on peut supposer (n° 2) que τ n'est pas nul; donc

$$\mathrm{N} = m_1 m_2,$$

ce qui fournit une nouvelle confirmation du théorème de Bezout. On trouvera ensuite que tous les coefficients de g'_{m_1-2} s'évanouissent de même pour ceux de g_{m_2-2}. Il semblerait, d'après cela, qu'il suffit d'effectuer la division binaire en prenant les quotients simultanés proportionnels aux dérivées partielles du dividende correspondant pour obtenir la relation (27) sous la forme (29); mais il n'en est rien : on peut s'en assurer par l'examen des cas particuliers les plus faciles, par exemple celui de deux équations, l'une du troisième, l'autre du premier degré.

3° La résolution des équations (p, q), (s_1), (s_2) serait extrêmement pénible, pour ne pas dire impossible, si chacune d'elles contenait toutes les inconnues. Mais les choses se passent à peu près comme dans les formules ordinaires de Newton. Les sommes d'un même degré se déterminent ensemble, indépendamment de celles de degrés plus élevés.

L'identification des groupes de degré μ dans les deux membres de l'équation (27) donne $\mu + 1 = m_1 + m_2 - 1$ équations où les inconnues sont $\sum_0 = \mathrm{N}$ et les $m_2 - 1 + m_1 - 1 = \mu$ coefficients des groupes

principaux de φ_1, φ_2; ce sont celles d'où nous venons de tirer la valeur de N. L'identification des groupes de degré $\mu - 1$ donne $\mu = m_1 + m_2 - 2$ équations où les inconnues sont $\sum \alpha$, $\sum \beta$ et les $m_2 - 2 + m_1 - 2 = \mu - 2$ coefficients des groupes qui suivent les principaux dans φ_1, φ_2; ces équations contiennent aussi N et les coefficients des groupes principaux de φ_1, φ_2; mais ces quantités sont connues par la résolution des premières. De même pour les groupes de degré $\mu - 2$, et ainsi de suite. Il arrivera bien entendu un moment où on devra faire intervenir successivement des groupes d'équations prises dans les systèmes (s_1), (s_2).

On remarquera que les sommes de degré ω dépendent simplement des coefficients des équations proposées qui affectent des termes de degrés égaux ou supérieurs à $m_1 - \omega$ dans la première, à $m_2 - \omega$ dans la seconde, absolument comme pour les équations à une seule inconnue.

4° Le système total des équations (p, q), (s_1), (s_2) se décompose donc en $\mu + 1$ autres beaucoup plus simples, qu'il faut résoudre dans un ordre déterminé. On remarquera que les coefficients des inconnues, dans chacun des systèmes secondaires, ne dépendent que de ceux des groupes principaux des équations proposées.

Pour rendre notre analyse tout à fait rigoureuse, il faudrait démontrer que chaque système secondaire est possible et déterminé. Le premier point est évident, le second revient à prouver que le déterminant des coefficients des quantités inconnues n'est pas nul; je n'ai pas encore pu l'établir d'une manière générale. On trouvera sans aucun doute que tous les systèmes secondaires ont un déterminant commun égal au premier membre de l'équation finale résultant de l'élimination de x, y entre les équations homogènes

$$t_{m_1} = 0, \quad t'_{m_2} = 0, \tag{31}$$

qui ne peut être nul, puisque ces équations n'admettent par hypothèse d'autres solutions que $x = y = 0$. Cette induction est au moins rendue fort plausible par l'examen des cas particuliers les plus faciles.

On peut observer encore que la nullité du déterminant d'un système secondaire entraînerait, à cause de la compatibilité évidente des équations qui composent celui-ci, la nullité de tous les numérateurs des

inconnues calculées par les formules de Cramer; or, ces numérateurs contiennent beaucoup de quantités qui n'entrent pas dans le dénominateur commun, et, par conséquent, il est difficile d'admettre qu'ils puissent s'évanouir, quelles que soient ces quantités.

5° Après avoir obtenu par ce qui précède les sommes de degrés égaux ou inférieurs à μ, on trouvera successivement celles de degrés supérieurs par un procédé analogue à celui qu'on emploie quand il s'agit d'une équation à une seule inconnue. Veut-on, par exemple, les sommes $\sum \alpha^{\mu+1}$, $\sum \alpha^{\mu}\beta \ldots$, $\sum \beta^{\mu+1}$? On fera $x=\alpha$, $y=\beta$ dans les proposées, on les multipliera successivement, la première par les monômes de degré $\mu - m_1 + 1$, $\alpha^{\mu-m_1+1}$, $\alpha^{\mu-m_1}\beta \ldots$, $\beta^{\mu-m_1+1}$, et on sommera les résultats obtenus, en considérant tour à tour tous les couples de solutions; de même pour la seconde, multipliée successivement par les monômes de degré $\mu - m_2 + 1$. On aura ainsi $\mu - m_1 + 2 + \mu - m_2 + 2$ ou $\mu + 2$ équations linéaires d'où l'on tirera les $\mu + 2$ sommes inconnues en fonction des coefficients des équations proposées et des sommes de degrés inférieurs que la méthode précédente aurait fait connaître, et ainsi de suite.

Quand le degré des sommes inconnues surpasse $\mu + 1$, on a évidemment par ce procédé plus d'équations qu'il n'en faut; mais on reconnaît aisément qu'on peut toujours en prendre un nombre suffisant pour obtenir un déterminant égal au premier membre de l'équation finale résultant de l'élimination de x, y entre les équations (31); il se présente même sous la forme que lui donne la méthode dialytique de M. Sylvester. Cette remarque confirme l'induction que nous faisions tout à l'heure.

10. La méthode que nous venons d'exposer exige, il ne faut pas l'oublier : 1° que les groupes principaux des équations proposées soient disjoints; 2° qu'elles n'aient pas de couples-racines multiples. La première condition est de rigueur, car sans elle le théorème fondamental ne peut exister avec l'énoncé dont nous nous sommes servi; je ne puis, pour le moment, traiter ce cas particulier avec toute la généralité qu'il comporte. Mais on voit aisément, par la méthode des limites, que nos formules subsistant pour des équations dont les couples-

racines diffèrent aussi peu qu'on le veût les uns des autres, on peut supposer ces différences infiniment petites, ce qui entraîne leur validité pour le cas même où il existe des couples multiples.

11. Appliquons la méthode à un système de deux équations du second degré, en posant

$$f_1 = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + h_1,$$
$$f_2 = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + d^2x + e_2y + h_2;$$

la division binaire du n° 9, effectuée par la méthode des dérivées partielles, donne ici

$$p_1 = a_1x + b_1y + a_1\alpha + b_1\beta + d_1, \quad q_1 = b_1x + c_1y + b_1\alpha + c_1\beta + e_1,$$
$$p_2 = a_2x + b_2y + a_2\alpha + b_2\beta + d_2, \quad q_2 = b_2x + c_2y + b_2\alpha + c_2\beta + e_2,$$

et par suite,

$$\begin{aligned}\sum \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_1x + b_1y, & b_1x + c_1y \\ a_2x + b_2y, & b_2x + c_2y \end{vmatrix} \\ + \Big[2(a_1b_2 - a_2b_1)\sum\alpha + (a_1c_2 - a_2c_1)\sum\beta + 4(a_1e_2 - a_2e_1) \\ + 4(d_1b_2 - d_2b_1)\Big]x \\ + \Big[(a_1c_2 - a_2c_1)\sum\alpha + 2(b_1c_2 - b_2c_1)\sum\beta + 4(b_1e_2 - b_2e_1) \\ + 4(d_1c_2 - d_2c_1)\Big]y \\ + (a_1b_2 - a_2b_1)\sum\alpha^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)\sum\alpha\beta + (b_1c_2 - b_2c_1)\sum\beta^2 \\ + [(a_1e_2 - a_2e_1) + (d_1b_2 - d_2b_1)]\sum\alpha \\ + [(b_1e_2 - b_2e_1) + (d_1c_2 - d_2c_1)]\sum\beta + 4(d_1e_2 - d_2e_1).\end{aligned}$$

On trouvera, d'autre part,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx} & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx} & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_1x + b_1y, & b_1x + c_1y \\ a_2x + b_2y, & b_2x + c_2y \end{vmatrix} + 2[(a_1e_2 - a_2e_1) + (d_1b_2 - d_2b_1)]x \\ + 2[(b_1e_2 - b_2e_1) + (d_1c_2 - d_2c_1)]y + (d_1e_2 - d_2e_1).\end{aligned}$$

Il faut maintenant porter ces expressions dans l'identité (27); μ est ici égal à 2, par conséquent φ_1, φ_2 sont des constantes, mais elles sont nulles, puisque les groupes principaux des deux parties du premier membre se détruisent. L'identité (27) prend donc la forme (29); en égalant les coefficients des mêmes puissances des variables, on trouve :

$$(p,q)\left\{\begin{aligned}&2(a_1b_2-a_2b_1)\sum\alpha+(a_1c_2-a_2c_1)\sum\beta=-2[(a_1e_2-a_2e_1)+(d_1b_2-d_2b_1)],\\&(a_1c_2-a_2c_1)\sum\alpha+2(b_1c_2-b_2c_1)\sum\beta=-2[(b_1e_2-b_2e_1)+(d_1c_2-d_2c_1)],\\&(a_1b_2-a_2b_1)\sum\alpha^2+(a_1c_2-a_2c_1)\sum\alpha\beta+(b_1c_2-b_2c_1\sum\beta^2\\&\quad=-[(a_1e_2-a_2e_1)+(d_1b_2-d_2b_1)]\sum\alpha\\&\qquad-[(b_1e_2-b_2e_1)+(d_1c_2-d_2c_1)\sum\beta-3(d_1e_2-d_2e_1).\end{aligned}\right.$$

Ce sont les équations que nous avons nommées (p,q); m_1-2, m_2-2 sont tous deux nuls; par conséquent les équations (s_1) comprendront simplement la relation obtenue en égalant à zéro la somme des résultats de la substitution des quatre couples racines à x, y dans f_1, et pareillement les équations (s_2) se réduiront à une seule. Les voici :

$$(s_1)\qquad a_1\sum\alpha^2+2b_1\sum\alpha\beta+c_1\sum\beta^2=-d_1\sum\alpha-e_1\sum\beta-4h_1,$$

$$(s_2)\qquad a_2\sum\alpha_2+2b_2\sum\alpha\beta+c_2\sum\beta^2=-d_2\sum\alpha-e_2\sum\beta-4h_2.$$

Des deux premières équations (p,q) on tire $\sum\alpha$, $\sum\beta$ en fonction de a_1, b_1, c_1, d_1, e_1; a_2, b_2, c_2, d_2, e_2; ces valeurs, substituées dans la troisième et dans les deux précédentes, permettront de calculer $\sum\alpha^2$, $\sum\alpha\beta$, $\sum\beta^2$, qui contiendront en outre les derniers coefficients h_1, h_2.

On remarquera que ces deux systèmes secondaires ont bien pour déterminant commun le premier membre de la relation qui exprimerait que les groupes principaux des équations proposées sont tous deux nuls sans que les inconnues le soient à la fois.

12. Notre théorie s'applique d'elle-même aux équations entières à un nombre quelconque d'inconnues, pourvu que leurs groupes principaux soient *disjoints*, c'est-à-dire ne puissent s'évanouir qu'en rendant à la fois toutes les inconnues égales à zéro.

Le théorème fondamental s'énonce comme il suit :

Si une fonction entière à i variables indépendantes s'évanouit pour tous les systèmes de solutions de i équations entières à i inconnues (en supposant que ces systèmes sont tous *simples*, c'est-à-dire n'annulent pas le déterminant des i^i dérivées partielles des premiers membres), *on peut la mettre sous forme d'une somme de produits des premiers membres des équations données par certaines fonctions entières dont les degrés égalent, ou du moins ne surpassent pas, les différences entre le degré de la fonction donnée et ceux des premiers membres des équations proposées.*

La démonstration se fait à peu près comme celle que nous avons donnée. On démontrera ensuite, comme nous l'avons fait, qu'en mettant chaque premier membre sous la forme

$$p(x-\alpha)+q(y-\beta)+r(z-\gamma)+\ldots,$$

la différence entre la somme des déterminants des i^i quantités

$$\begin{array}{l} p_1,\quad q_1,\quad r_1\ldots, \\ p_2\ldots, \\ \ldots\ldots \end{array}$$

et le déterminant des dérivées partielles s'évanouit pour tous les systèmes de solutions des équations proposées. On tirera une identité analogue à (27), qu'on pourra réduire aussi à la forme (29). On écrira les équations analogues à (p, q), puis les i groupes d'équations semblables à (s_1), (s_2), et on aura tous les éléments nécessaires pour calculer les sommes des puissances semblables jusqu'à celles de degré $\mu = \sum m - i$ inclusivement. Toutes les observations que nous avons faites pour un système binaire sont applicables au cas général.

L'une d'elles conduit au résultat suivant :

Les sommes des puissances semblables des racines d'un système d'équations entières et simultanées, et par conséquent les fonctions symétriques

et entières quelconques sont des fonctions rationnelles des coefficients des équations proposées. Ces fonctions sont fractionnaires par rapport aux coefficients des groupes principaux, mais nécessairement entières, par rapport à ceux de tous les autres.

Et si l'on admet notre induction (n° 9, 4°) généralisée, *les sommes ne contiennent d'autre dénominateur que le premier membre de l'équation résultant de l'élimination des inconnues entre les équations qui exprimeraient que tous les groupes principaux sont nuls sans que les inconnues le soient à la fois; si donc les coefficients des équations proposées sont des nombres entiers, et si ce premier membre se réduit à l'unité, toutes les sommes ont elles-mêmes pour valeurs des nombres entiers.*

Octobre 1865.

RECHERCHES
D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE,

PAR M. A. LÉVISTAL,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

PREMIER MÉMOIRE.

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SYSTÈMES OPTIQUES DE RAYONS RECTILIGNES.

INTRODUCTION.

1. Les premières recherches relatives aux propriétés générales des systèmes formés par les rayons lumineux remontent à l'année 1682, et ont trait aux courbes caustiques. Elles sont dues à Tschirnhausen (*), qui se proposa de trouver l'équation de la caustique par réflexion dans le cas particulier où, les rayons incidents étant parallèles et contenus dans un même plan, la réflexion a lieu sur une circonférence de cercle. Ce problème, qui paraît aujourd'hui fort simple, était alors d'une grande difficulté, et la solution donnée par Tschirnhausen fut reconnue fausse par Cassini, Mariotte et de la Hire, commissaires nommés par l'Académie des Sciences. L'attention des géomètres se trouva dès lors appelée sur ce genre de questions, dont ils ne tardèrent pas à apprécier toute l'importance pour l'optique. Les Bernoulli, Carré, de l'Hôpital et plusieurs autres mathématiciens, indiquèrent des méthodes générales pour obtenir l'équation des caustiques planes par réflexion et par réfraction, quelle que soit la nature de la courbe réfléchissante ou réfringente. A une époque plus récente, la théorie des caustiques

(*) TSCHIRNHAUSEN, *Inventa nova, etc.*, *Acta eruditorum*, année 1682, p. 364.

planes a été notablement perfectionnée par M. Quetelet, qui a montré que, dans un grand nombre de cas, ces caustiques, quoique fort compliquées par elles-mêmes, ne sont que les développées d'autres courbes beaucoup plus simples, qui sont en général des épicycloïdes (*).

2. Malus est le premier qui ait considéré les systèmes de rayons dans l'espace. C'est dans un Mémoire sur l'optique, publié en 1810 (**), qu'il démontra, au moyen d'une analyse assez laborieuse, le théorème fondamental qui porte souvent son nom. Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante : *Lorsque tous les rayons qui composent un faisceau lumineux sont normaux à une même surface, ils conservent cette propriété après un nombre quelconque de réflexions sur des surfaces quelconques, et un nombre quelconque de réfractions par leur passage à travers des milieux limités jouissant de pouvoirs réfringents quelconques.* Une erreur de calcul avait conduit Malus à refuser à cette proposition toute la généralité qu'elle comporte, et à la restreindre au cas d'une réflexion ou d'une réfraction unique. M. Charles Dupin reconnut, en 1822, que le théorème de Malus s'étend à un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, et substitua, pour le cas de la réflexion, une démonstration géométrique fort simple aux considérations analytiques dont Malus avait fait usage (***). Timmermans (****) et, d'après lui, Gergonne (*****), traitèrent d'une manière analogue le cas de la réfraction.

L'importance du théorème de Malus, qui n'est applicable, du reste, qu'aux milieux isotropes, et sa relation avec la théorie des caustiques sont faciles à concevoir. Si, en effet, un système de rayons lumineux peut être considéré comme formé de droites normales à une même surface, il en résulte immédiatement que le lieu des intersections de ces rayons, c'est-à-dire la surface caustique, n'est autre que la surface à deux nappes, lieu des centres de courbure de cette trajectoire ortho-

(*) QUETELET, Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, soit par réflexion, soit par réfraction, *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III, p. 15.

(**) MALUS, Mémoire sur l'Optique, *Journal de l'École Polytechnique*, XIVe Cahier, p. 1.

(***) CH. DUPIN, *Développements de Géométrie;* 4e Mémoire : Sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction, p. 187.

(****) TIMMERMANS, *Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 336.

(*****) GERGONNE, Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, p. 307.

gonale des rayons; la théorie des caustiques se trouve ainsi rattachée par un lien intime à celle de la courbure des surfaces.

3. Les géomètres dont nous venons de parler s'étaient occupés exclusivement des milieux isotropes. Les systèmes de rayons qui se propagent dans les milieux de ce genre jouissent, comme nous venons de le voir, de la propriété d'être toujours normaux à une même surface; dans les milieux biréfringents ou anisotropes il n'en est généralement pas ainsi, ce qui a fait donner aux systèmes qui se propagent dans de tels milieux la qualification d'*irréguliers*. L'étude de ces systèmes irréguliers a été abordée pour la première fois par Hamilton dans son traité intitulé *Theory of systems of rays*, et surtout dans un supplément publié en 1830 (*). Dans ces importants Mémoires, Hamilton prend pour point de départ le principe de la moindre action, qui, lorsqu'on l'applique aux phénomènes de l'optique, conduit à la condition

$$\delta \int v\,ds = 0,$$

ds étant l'élément de la trajectoire suivie par le rayon lumineux, v la vitesse de la lumière calculée dans l'hypothèse de l'émission. Il fait dépendre la solution de toutes les questions relatives à la réflexion et à la réfraction, ordinaire ou extraordinaire, de l'existence d'une *fonction caractéristique* pour chaque système optique de rayons. Cette fonction est définie en général de la manière suivante :

$$V = \int v\,ds = f(x, y, z, x', y', z', \psi).$$

x, y, z sont les coordonnées du point final d'une trajectoire lumineuse, x', y', z' celles du point initial, ψ une constante qui dépend de la couleur. Ce qui distingue les recherches d'Hamilton au sujet de cette intégrale, c'est qu'il la regarde comme dépendant des coordonnées variables des deux extrémités du rayon et de la couleur, tandis que, dans l'énoncé du principe de la moindre action, ces coordonnées extrêmes et la couleur sont considérées comme constantes, et les points intermé-

(*) HAMILTON, Theory of Systems of Rays, *Transactions of the Irish Academy*, t. XV, p. 69, et t. XVI, p. 1 et 94.

diaires où s'effectue la réflexion ou la réfraction sont seuls supposés varier. Hamilton, dans le Rapport qu'il fit sur ses travaux à l'Association Britannique (*), fait remarquer que la fonction caractéristique V, dans l'hypothèse des ondulations, représente *le temps de la propagation de la lumière d'un point à un autre.* Mais il se borne à indiquer ce point de vue sans en tirer autrement parti, ce qui s'explique aisément par le peu de faveur dont jouissait encore en Angleterre à cette époque la théorie ondulatoire de la lumière. Hamilton s'occupe du reste presque exclusivement des systèmes réguliers de rayons, et ce n'est qu'accessoirement qu'il parle des modifications introduites dans ces systèmes par leur passage à travers des milieux biréfringents.

4. Les travaux d'Hamilton n'obtinrent pas d'abord toute l'attention qu'ils méritent, et ce n'est qu'après un assez long intervalle que nous voyons M. Kummer revenir, en 1859, sur le même sujet dans un très-remarquable Mémoire qui porte pour titre : *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes* (**). Le célèbre géomètre allemand s'est proposé d'*étudier dans toute leur généralité les propriétés d'un système de droites remplissant l'espace ou une portion de l'espace, de telle manière que, par un point donné, il passe un rayon ou un nombre déterminé de rayons.* Se plaçant à un point de vue purement géométrique, il n'a nullement à s'occuper des changements produits dans la direction des rayons par la réflexion ou la réfraction, ni des relations de ces directions avec le système des ondes lumineuses. De plus, il s'élève à un degré de généralité qui, sans doute, a un intérêt considérable pour la géométrie, mais qui est inutile en optique. Les rayons qui se meuvent dans un milieu homogène quelconque jouissent en effet, de quelque manière qu'ils y aient été introduits, de cette propriété, dont on trouvera plus loin la démonstration, que leur direction a avec celle du plan tangent à la surface de l'onde une liaison déterminée et constante pour un même milieu. Il résulte de là que les systèmes de rayons optiquement réalisables dans un milieu donné ne sont pas quelconques,

(*) *Report of the first and the second meetings of British Association for the advancement of science*, p. 545.

(**) KUMMER, Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme, *Journal de Crelle*, t. LVII, p. 189.

que leur constitution est dans une connexion intime avec celle du milieu, et qu'ils présentent un certain nombre de particularités n'appartenant pas à un système de droites choisies tout à fait arbitrairement.

Les conséquences que comporte la théorie de M. Kummer, lorsqu'on la restreint aux systèmes de rayons optiquement possibles, ont été développées ultérieurement par M. Meibauer (*). Cet auteur s'occupe presque exclusivement des surfaces caustiques; c'est dans son travail que se trouve pour la première fois énoncée d'une façon nette la relation qui, dans un milieu homogène quelconque, existe entre la direction d'un rayon et celle du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon.

5. Le rapide aperçu historique que l'on vient de lire indique suffisamment le genre de questions que je me propose de traiter. Mon but est de simplifier et de généraliser à la fois la démonstration des principes de l'optique géométrique. La méthode à laquelle j'ai recours consiste essentiellement à faire intervenir dans la solution des problèmes qui sont du ressort de cette branche des mathématiques appliquées la considération des ondes lumineuses, et aussi celle du temps employé par la lumière pour se propager d'un point à un autre. Cette manière de procéder offre l'avantage de permettre de prendre pour point de départ, non pas les lois de la réflexion et de la réfraction dans les milieux isotropes, mais le principe général énoncé pour la première fois par Huyghens sous le nom de *principe des ondes enveloppes*, et qui est applicable à toute espèce de milieu homogène. Les théorèmes de l'optique géométrique reçoivent ainsi, par l'introduction de la notion du temps, une forme qui permet d'embrasser, dans un énoncé unique, les propriétés des trajectoires lumineuses dans tous les milieux homogènes, isotropes ou anisotropes.

Le présent Mémoire a pour objet l'étude des propriétés générales des systèmes optiques de rayons rectilignes, c'est-à-dire des systèmes qui se propagent dans un milieu *homogène* quelconque (**). Les prin-

(*) MEIBAUER, Theorie der gradlinigen Strahlensysteme des Lichts, Berlin, 1864.

(**) Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été consignés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 10 septembre 1866. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIII, p. 458.

cipes qui y sont exposés recevront ultérieurement leur application dans d'autres Mémoires consacrés aux surfaces aplanétiques et aux surfaces caustiques. Les résultats acquis pour les milieux homogènes peuvent du reste facilement s'étendre aux milieux hétérogènes, ceux-ci pouvant toujours être considérés comme formés par la juxtaposition d'une infinité de couches homogènes infiniment minces.

I. — *Définitions et notations.*

6. Soit, dans un milieu homogène quelconque, un centre d'ébranlement dont émane de la lumière homogène : le lieu des points auxquels se communique le mouvement vibratoire, au bout d'un temps donné, constitue une certaine surface; comme suivant chacune des directions qui partent du point lumineux la vitesse de propagation de ce mouvement est constante, les surfaces qui correspondent à des temps différents sont toutes semblables et semblablement placées par rapport au point lumineux. Le milieu étant homogène, la forme de ces surfaces et leur orientation dans le milieu sont indépendantes de la position du point dont émane la lumière. Chacune d'elles a évidemment pour centre le point lumineux auquel elle se rapporte; d'ailleurs, la vitesse de la lumière ne pouvant devenir infinie suivant aucune direction, ce sont des surfaces fermées. Nous les appellerons *surfaces d'onde caractéristiques du milieu*. Il est clair, en effet, qu'un milieu homogène est optiquement défini, du moins pour une couleur déterminée, lorsqu'on connaît le lieu des points auxquels un mouvement vibratoire correspondant à cette couleur et émané d'un point quelconque du milieu se communique au bout d'un temps donné. Connaissant une quelconque des surfaces d'onde caractéristiques d'un milieu homogène, par exemple celle qui a pour centre un point pris pour origine et qui correspond à l'unité de temps, il est facile de trouver toutes les autres; pour qu'une de ces surfaces soit déterminée, il suffit alors de donner son centre et le temps auquel elle correspond.

Pour que deux milieux homogènes soient identiques au point de vue optique (en ne considérant toujours que la lumière d'une couleur

déterminée), il faut et il suffit que les surfaces d'onde caractéristiques de ces deux milieux correspondant à un même temps, par exemple à l'unité de temps, soient identiques. Il est cependant à remarquer que, deux milieux homogènes étant optiquement identiques, la lumière peut néanmoins éprouver un changement de direction en passant de l'un dans l'autre; c'est ce qui se produira toutes les fois que ces milieux seront placés de façon que les rayons vecteurs homologues des surfaces d'onde caractéristiques ne soient pas parallèles, comme cela a lieu lorsqu'on superpose deux lames d'un même cristal taillées suivant des plans différents. Pour que deux milieux homogènes puissent être considérés comme formant un tout continu, il faut donc et il suffit : 1° que les surfaces d'onde caractéristiques correspondant à l'unité de temps soient identiques; 2° que les rayons vecteurs homologues de ces surfaces soient parallèles. Pour les milieux homogènes isotropes, les surfaces d'onde caractéristiques étant toujours sphériques, la première condition est suffisante.

Les milieux homogènes dont les surfaces d'onde caractéristiques correspondant à l'unité de temps, sans être identiques, sont semblables, constituent un groupe et jouissent d'un certain nombre de propriétés communes : tel est, par exemple, le groupe des milieux homogènes isotropes dont les surfaces d'onde caractéristiques, correspondant à l'unité de temps, sont toutes des sphères, mais de rayons différents.

7. Les surfaces d'onde caractéristiques d'un milieu homogène ont une ou plusieurs nappes, suivant que, sur chaque direction, le mouvement lumineux peut se propager dans ce milieu avec une vitesse unique ou avec plusieurs vitesses différentes; les milieux dont les surfaces d'onde caractéristiques n'ont qu'une nappe sont dits *uniréfringents;* ceux où ces surfaces ont deux nappes sont dits *biréfringents*. A un autre point de vue, on distingue les milieux *isotropes,* c'est-à-dire ceux dans lesquels la lumière se propage avec la même vitesse dans toutes les directions, et les milieux *anisotropes*, dans lesquels la vitesse de propagation de la lumière varie avec la direction. Le calcul et l'expérience s'accordent à montrer, si l'on ne tient compte que des vibrations transversales, qui seules paraissent aptes à produire l'impression lumineuse, que tout milieu homogène non isotrope est nécessairement biré-

fringent. Dans les milieux homogènes isotropes ou uniréfringents, les surfaces d'onde caractéristiques sont évidemment des sphères. Quant aux milieux anisotropes ou biréfringents, l'optique physique nous apprend qu'ils se divisent en deux classes. Pour les uns, les surfaces d'onde caractéristiques sont formées d'une nappe sphérique et d'une nappe présentant la forme d'un ellipsoïde de révolution, ces deux nappes s'enveloppant l'une l'autre et se touchant aux extrémités de l'axe de la nappe ellipsoïdale : ce sont les milieux *uniaxes*. Pour les autres, les surfaces d'onde caractéristiques sont des surfaces du quatrième degré indécomposables en surfaces du second degré : ce sont les milieux *biaxes*. Remarquons dès à présent que les milieux uniaxes peuvent être considérés comme isotropes relativement aux rayons qui correspondent à la nappe sphérique et qu'on nomme *rayons ordinaires*. Tous les théorèmes démontrés pour les milieux isotropes sont donc applicables aux milieux biréfringents uniaxes, lorsqu'on se borne à considérer dans ces derniers milieux les rayons ordinaires.

8. Nous représenterons par

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface d'onde caractéristique d'un milieu homogène ayant pour centre l'origine des coordonnées et correspondant à l'unité de temps. Celle de la surface d'onde caractéristique ayant pour centre l'origine et correspondant au temps T sera, par suite,

$$f\left(\frac{x}{T}, \frac{y}{T}, \frac{z}{T}\right) = 0.$$

Lorsque cette dernière équation sera supposée résolue par rapport à T, nous l'écrirons

$$\varphi(x, y, z) = T.$$

L'équation de la surface d'onde caractéristique ayant pour centre un point dont les coordonnées sont (a, b, c) et correspondant au temps T sera

$$f\left(\frac{x-a}{T}, \frac{y-b}{T}, \frac{z-c}{T}\right) = 0,$$

ou

$$\varphi(x-a, y-b, z-c) = T.$$

S'il y a lieu de considérer deux milieux différents, nous donnerons au signe de la fonction f ou φ l'indice 1 pour le milieu où se propagent les rayons incidents et réfléchis, l'indice 2 pour le milieu où se meuvent les rayons réfractés. Lorsqu'il s'agira d'un milieu biréfringent, les indices o ou e ajoutés au signe de la fonction serviront à distinguer les deux nappes des surfaces d'onde caractéristiques.

Quand nous parlerons de réflexion et de réfraction, nous supposerons toujours implicitement que la surface de séparation où s'opère le changement de direction des rayons est continue, c'est-à-dire qu'en chaque point de cette surface on ne peut lui mener qu'un seul plan tangent. Cette restriction est essentielle, car la plupart des théorèmes auxquels nous serons conduits cessent d'être vrais lorsque la surface de séparation est formée de plusieurs portions de surfaces se coupant sous des angles différents de zéro, lorsque, par exemple, cette surface est polyédrique. Le cas où la surface de séparation présente un ou plusieurs points saillants doit également être réservé.

9. Nous désignerons, pour abréger, les rayons ordinaires par le signe (o), les rayons extraordinaires par le signe (e). Lorsque la lumière passe d'un milieu biréfringent dans un autre milieu également biréfringent il y a en général quatre espèces de rayons réfractés : nous désignerons par le signe (o, o) ceux qu'on obtient en prenant dans les deux milieux les nappes ordinaires des surfaces d'onde caractéristiques, les trois autres espèces de rayons réfractés seront désignées d'une manière analogue par les symboles (e, e), (o, e), (e, o), la première lettre se rapportant toujours au premier milieu, c'est-à-dire à celui dans lequel se meuvent les rayons incidents. On sait d'ailleurs que la construction qui donne certains de ces rayons réfractés peut devenir impossible, et leur nombre se réduire à 3, à 2, à 1, et même à zéro. Lorsque la lumière émanée d'un point situé dans un milieu biréfringent subit une réflexion, il y a lieu également de distinguer quatre espèces de rayons réfléchis que nous désignerons par les mêmes notations que dans le cas de la réfraction. Mais ici il faut remarquer que les rayons réfléchis (o, o) et (e, e) existent toujours, tandis que la construction qui donne les rayons réfléchis (o, e) ou (e, o) peut devenir impossible. Il y a d'ailleurs une distinction essentielle à faire entre les rayons réfléchis (o, o) et (e, e)

d'une part, et les rayons réfléchis (o, e) et (e, o) de l'autre. Pour les rayons du premier groupe, c'est la même nappe de la surface d'onde caractéristique du milieu qui correspond aux rayons incidents et aux rayons réfléchis; pour ceux du second groupe, ce sont deux nappes différentes. Il en résulte, comme cela est aisé à concevoir, que cette dernière espèce de réflexion offre plus d'analogie avec la réfraction qu'avec la réflexion proprement dite. Nous dirons qu'il y a *réflexion homologue* lorsque les rayons incidents et les rayons réfléchis correspondent à une même nappe de la surface d'onde caractéristique du milieu, et qu'il y a *réflexion antilogue* dans le cas contraire. Les rayons (o, o) et (e, e) sont donc des rayons qui ont subi une réflexion homologue, tandis que les rayons (o, e) et (e, o) ont éprouvé une réflexion antilogue. Dans les milieux uniréfringents, la réflexion est nécessairement toujours homologue.

10. Lorsque les directions des rayons incidents qui, dans un milieu homogène, tombent sur une surface réfléchissante ou réfringente concourent en un même point situé *en deçà* de cette surface, ce point, qu'il soit ou non celui d'où provient la lumière, portera le nom de *point lumineux réel;* si le point de concours des rayons incidents est situé *au delà* de la surface réfléchissante ou réfringente, nous dirons, pour abréger le langage, que ces rayons émanent d'un *point lumineux virtuel.* Quant tous les rayons réfléchis ou réfractés qui se propagent dans un milieu homogène sont dirigés de façon que ces rayons ou leurs prolongements convergent en un même point, nous nommerons ce point *foyer total.* Si parmi les rayons réfléchis ou réfractés qui se meuvent dans un milieu homogène il y en a une infinité, formant une surface conique, qui, par eux-mêmes ou par leurs prolongements, concourent en un même point, ce point s'appellera *foyer partiel.* Dans le cas de la réflexion, un foyer total ou partiel sera dit *réel* s'il est en deçà de la surface réfléchissante, *virtuel* s'il est au delà; dans le cas de la réfraction, ce sera l'inverse. S'il existe une série de foyers partiels formant une ligne continue, cette ligne recevra la dénomination de *ligne focale.*

11. Nous terminerons ces considérations préliminaires par quelques remarques importantes relatives aux ondes.

Lorsque les rayons qui se meuvent dans un milieu homogène ne sont pas issus d'un point situé dans ce milieu, ou quand, bien qu'émanant d'un point du milieu, ils ont subi une ou plusieurs réflexions, le lieu des points atteints au même instant par le mouvement vibratoire qui se propage suivant ces rayons porte encore le nom de *surface d'onde*. Mais, et c'est là un point sur lequel on ne saurait trop insister, ces ondes réfléchies ou réfractées n'ont pas en général, ainsi que nous le ferons voir plus loin, la forme des surfaces d'onde caractéristiques du milieu dans lequel elles se propagent et ne constituent plus nécessairement un système de surfaces semblables et concentriques; dans un milieu isotrope, par exemple, ces ondes ne sont sphériques que dans des cas très particuliers.

Soit un système de rayons issus originairement d'un point lumineux situé dans un milieu homogène, et se propageant actuellement, soit dans ce milieu, soit dans tout autre milieu homogène, ces rayons pouvant avoir subi un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, mais n'ayant eu à traverser que des milieux homogènes : l'onde qui correspond à ces rayons peut avoir plusieurs nappes, même lorsque le milieu dans lequel ils se meuvent actuellement est isotrope; c'est ce qui arrivera en général si ces rayons ont eu à traverser antérieurement des milieux biréfringents. A plus forte raison l'onde a-t-elle plusieurs nappes quand les rayons se propagent actuellement dans un milieu biréfringent. Il est essentiel, d'après cela, pour donner de la précision aux théorèmes que nous aurons à énoncer, de grouper les rayons qui, issus originairement d'un même point lumineux, se propagent dans un milieu homogène quelconque en systèmes tels qu'*aux rayons d'un même système correspondent des ondes dont chacune soit formée d'une nappe unique et continue*. Nous appellerons *rayons de même espèce* ceux qui font partie d'un tel système.

Pour que des rayons, issus originairement d'un même point, n'ayant eu à traverser que des milieux homogènes et se propageant actuellement dans un tel milieu, soient de même espèce, il faut et il suffit évidemment, d'après la définition que nous venons de donner :

1° Que, si le milieu où se trouve le point lumineux est biréfringent, ces rayons soient tous originairement *de même nature*, c'est-à-dire tous ordinaires ou tous extraordinaires;

2° Qu'ils aient subi les mêmes réflexions et les mêmes réfractions

sur les mêmes surfaces dans le même ordre, et, par conséquent, traversé les mêmes milieux homogènes;

3° Que, dans chacune de ces réflexions ou de ces réfractions, ces rayons aient, ou tous conservé leur nature, c'est-à-dire leur qualité d'ordinaire ou d'extraordinaire, ou tous changé à la fois de nature.

Il faut se garder de confondre la dénomination de rayons de même espèce avec celle de rayons de même nature : des rayons peuvent être de même nature, c'est-à-dire tous ordinaires ou tous extraordinaires relativement au milieu dans lequel ils se meuvent, sans pour cela être de même espèce; des rayons de même espèce sont nécessairement de même nature.

12. Considérons enfin un système de rayons de même espèce se propageant dans un milieu homogène quelconque; désignons par S l'onde formée d'une nappe unique et continue qui, à un certain instant, correspond à ces rayons, et par R un quelconque des rayons du système. Le rayon R peut rencontrer l'onde S en plus d'un point; mais, *parmi les points d'intersection du rayon* R *avec l'onde* S, *il y en a toujours un, et un seul, où le mouvement vibratoire est parvenu sur le rayon* R *à l'instant considéré*, et c'est toujours ce point que nous entendrons désigner quand nous parlerons du point où le rayon R rencontre l'onde S. Cette remarque ne doit pas être perdue de vue, car ce que nous aurons à dire de ce point ne sera nullement applicable aux autres points d'intersection du rayon R avec l'onde S, s'il en existe plus d'un. On voit, de plus, que, toutes les fois qu'une onde S est rencontrée en plus d'un point par un rayon R du système auquel elle correspond, tous ces points, sauf celui où le mouvement vibratoire est parvenu sur le rayon R à l'instant considéré, sont nécessairement des points d'intersection du rayon R avec d'autres rayons du système.

II. — *Principe de Huyghens ou des ondes enveloppes. — Construction générale des ondes réfléchies et réfractées.*

13. Les seules notions que l'optique géométrique ait à emprunter à la théorie mécanique des ondes sont :

1° La connaissance de la forme des surfaces d'onde caractéristiques des différents milieux homogènes;

2° Le théorème connu sous le nom de *principe de Huyghens* ou *principe des ondes enveloppes* (*).

Il importe, avant tout, de bien préciser la signification et la portée de ce principe fondamental, dont nous ne ferons, pour ainsi dire, que développer les conséquences dans tout ce qui va suivre.

Plaçons-nous d'abord dans le cas le plus simple, celui où la lumière émanée d'un point situé dans un milieu homogène indéfini se propage dans ce milieu sans subir de réflexion ni de réfraction. Soit O le point lumineux; désignons par S la position occupée par l'onde émanée du point lumineux au bout du temps T, par S′ la position de cette même onde au bout du temps $T + t$. Les surfaces S et S′ sont des surfaces d'onde caractéristiques du milieu; elles sont donc semblables et semblablement placées par rapport au point lumineux O. Il suit de là que l'onde S′ peut être regardée comme l'enveloppe des surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites des différents points de l'onde S comme centres et correspondant au temps t; ces surfaces d'onde caractéristiques sont ce que Huyghens appelle les *ondes élémentaires*. On voit de plus que, pour avoir la direction du rayon qui passe par un point quelconque A de l'onde S′, il suffit de joindre ce point au centre de l'onde élémentaire qui touche en A l'onde S′. Il est bien entendu que, si le milieu est biréfringent, on doit prendre pour onde élémentaire l'une ou l'autre des nappes de la surface d'onde caractéristique du milieu, suivant qu'il s'agit de la propagation des rayons ordinaires ou des rayons extraordinaires. Les résultats que nous venons d'énoncer s'expriment sous une autre forme en disant que, pour étudier la propagation de l'onde postérieurement au temps T, on peut supposer le point lumineux O supprimé, à condition de considérer chacun des points de l'onde S comme un centre d'ébranlement, mais de ne regarder chacune des ondes élémentaires émanées des différents points de la surface S comme n'étant active qu'au point où elle touche l'enveloppe commune. Tant qu'on se borne au cas simple de la propagation de la lumière dans un même milieu homogène, le principe de Huyghens n'est que l'expression d'une identité, et il n'est pas besoin de démonstration spéciale pour faire voir qu'il ne peut y avoir à un

(*) Huyghens, *Traité de la lumière*, Leyde, 1690.

instant donné de mouvement sensible sur chacune des ondes élémentaires qu'au point où elle touche l'onde enveloppe. Mais Huyghens ne s'est point arrêté là : par une sorte d'intuition il est arrivé à généraliser le principe des ondes enveloppes et à le faire servir à la construction des ondes réfléchies et réfractées. Le principe, conçu dans toute son extension, peut s'énoncer comme il suit : *Que les différents points d'une surface soient atteints successivement ou simultanément par le mouvement vibratoire émané d'un point lumineux, l'onde, à un instant quelconque, est toujours l'enveloppe des ondes élémentaires émanées des différents points de la surface et considérées dans la position qu'elles occupent à ce moment; de plus, le rayon qui passe par un point quelconque de l'onde passe aussi par le centre de l'onde élémentaire qui touche en ce point l'onde enveloppe.* La surface dont il s'agit peut être, soit une surface d'onde, soit une surface réfléchissante ou réfringente, et, par suite, les ondes élémentaires peuvent correspondre à des temps égaux ou inégaux. Pris dans cette acception générale, le principe de Huyghens est loin d'être évident par lui-même, comme cela a lieu dans le cas où l'onde se propage dans un même milieu homogène sans se réfléchir ni se réfracter. Il ne suffit pas, comme l'a fait Huyghens, et après lui Young et beaucoup d'autres auteurs, de remarquer que les ondes élémentaires se serrent de plus en plus à mesure que l'on se rapproche de l'onde enveloppe : tant que l'on ne fait pas intervenir la notion des interférences, on peut bien démontrer que, sur chaque onde élémentaire, à une distance finie de l'enveloppe commune, le mouvement vibratoire est très-petit par rapport à ce qu'il est sur l'enveloppe, mais non pas qu'il est infiniment petit (*). Ce n'est que par les travaux de Fresnel qu'il a été prouvé rigoureusement que les ondes élémentaires se détruisent par interférence, en tous les points qui ne font point partie de l'enveloppe commune, et que l'emploi du principe de Huyghens s'est trouvé justifié dans tous les cas.

14. Prenons donc ce principe pour point de départ, et, avant de passer à la construction générale des ondes réfléchies ou réfractées,

(*) C'est ce que M. Verdet a prouvé par l'analyse dans les premières leçons du Cours d'optique supérieure professé à la Sorbonne en 1865.

appliquons-le à la solution d'un problème qui se présentera constamment à nous par la suite. Soit donnée une onde S correspondant à un système de rayons de même espèce et se propageant dans un milieu homogène; cette onde, comme nous l'avons déjà fait remarquer, n'aura pas en général la forme des surfaces d'onde caractéristiques du milieu où elle se propage, parce que les rayons pourront ne pas être issus d'un point situé dans ce milieu, et que, même lorsqu'ils émanent d'un point situé dans ce milieu, ils pourront avoir subi une ou plusieurs réflexions. Il s'agit, la position de l'onde S étant connue à un certain instant, de trouver la position de cette même onde au bout d'un temps T positif ou négatif, c'est-à-dire à une époque postérieure ou antérieure de T à l'instant considéré, en supposant que, pendant ce temps T, l'onde ne subisse ni réflexion ni réfraction. D'après le principe des ondes enveloppes, il suffira, à cet effet, de décrire de chacun des points de la première onde comme centre une surface d'onde caractéristique du milieu correspondant au temps T; si le milieu est biréfringent, on prendra la nappe ordinaire ou la nappe extraordinaire de la surface d'onde caractéristique, suivant que les rayons du système sont eux-mêmes ordinaires ou extraordinaires. L'enveloppe des portions des surfaces d'onde caractéristiques ainsi décrites qui se trouvent, si T est positif, en avant de la première onde, si T est négatif, en arrière de cette onde, sera l'onde cherchée. Il pourra se faire que l'onde obtenue au moyen de cette construction soit, en totalité ou en partie, en dehors des limites du milieu; c'est ce que nous exprimerons en disant que cette onde est *virtuelle* en totalité ou en partie. La considération des positions virtuelles de l'onde, c'est-à-dire des positions qu'elle occuperait à des époques antérieures ou postérieures à celles où cette onde passe par ses positions réelles, si le milieu dans lequel elle se meut se continuait au delà des limites qui le séparent des milieux contigus, nous sera d'un grand secours dans la démonstration de plusieurs théorèmes.

Remarquons encore que, d'après la construction que nous venons d'indiquer, toutes les fois que l'onde qui se propage dans un milieu homogène ne coïncide pas avec l'une des surfaces d'onde caractéristiques de ce milieu, les différentes positions qu'elle occupe successivement ne constituent plus un système de surfaces semblables et concentriques.

15. Il est facile de traduire la construction précédente en langage analytique. Désignons, en effet, par

$$(1) \qquad \psi(x', y', z') = 0$$

l'équation de l'onde considérée dans la position qu'elle occupe à un certain moment pris pour origine, et soit

$$f_1(x, y, z) = 0$$

l'équation de la nappe, de même nature que les rayons, de la surface d'onde caractéristique du milieu décrite de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps. L'équation de la surface d'onde caractéristique du milieu, décrite d'un point quelconque (x', y', z') de l'onde primitive comme centre et correspondant au temps T, sera, en ne considérant que celle des nappes de cette surface qui est de même nature que les rayons,

$$(2) \qquad f_1\left(\frac{x-x'}{T}, \frac{y-y'}{T}, \frac{z-z'}{T}\right) = 0.$$

L'onde au bout du temps T est l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (2). Pour obtenir cette enveloppe, il faut, entre les équations (1) et (2), éliminer l'un des trois paramètres variables x', y', z', par exemple z', ce qui donne une équation de la forme

$$(3) \qquad \Phi(x, y, z, x', y', T) = 0,$$

qui ne contient plus que deux paramètres arbitraires x' et y'. Si, entre l'équation (3) et les deux équations qu'on obtient en la différentiant par rapport aux deux variables x' et y', équations qui sont

$$\frac{d\Phi}{dx'} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dy'} = 0,$$

on élimine x' et y', on arrive à une équation de la forme

$$F(x, y, z, T) = 0,$$

qui représente l'onde dans la position qu'elle occupe au temps T.

16. Nous pouvons maintenant aborder le problème général de la

construction des ondes réfléchies ou réfractées. Soient deux milieux homogènes séparés par une surface continue; supposons que, dans l'un de ces milieux, se propage un système de rayons de même espèce, issus originairement d'un point lumineux situé dans ce milieu ou dans tout autre milieu homogène, mais n'ayant eu à traverser que des milieux homogènes. A ce système de rayons correspond un système d'ondes que nous nommerons *ondes incidentes*, et, comme les rayons sont de même espèce, chaque onde incidente est formée d'une nappe unique et continue. Lorsque les rayons incidents viennent à rencontrer la surface de séparation des deux milieux, la lumière se divise, du moins en général, en deux parties, dont l'une rebrousse chemin dans le premier milieu et est dite *réfléchie*, tandis que l'autre pénètre dans le second milieu et est dite *réfractée*.

Ceci posé, considérons l'onde incidente dans une certaine position S, où elle coupe la surface de séparation des deux milieux, et proposons-nous de trouver la position de l'onde réfléchie ou réfractée. Nous ferons encore usage du principe des ondes enveloppes. Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse de l'onde réfractée. Des différents points de la courbe suivant laquelle l'onde S coupe la surface réfringente comme centres on décrira des surfaces d'onde caractéristiques du second milieu correspondant au temps T; on cherchera ensuite l'intersection de l'onde incidente postérieure de τ à l'onde S avec la surface réfringente, et, des différents points de cette courbe comme centres, on décrira des surfaces d'onde caractéristiques du second milieu correspondant au temps $T - \tau$. On donnera à τ toutes les valeurs positives comprises entre zéro et T, et toutes les valeurs négatives comprises depuis zéro jusqu'à une certaine valeur limite pour laquelle l'onde incidente devient tangente à la surface réfringente et cesse de la couper; l'enveloppe des portions situées dans le second milieu des surfaces d'onde caractéristiques ainsi décrites des différents points de la surface réfringente comme centres sera l'onde réfractée au bout du temps T. En d'autres termes, de chaque point de la surface réfringente comme centre on décrit une surface d'onde caractéristique du second milieu correspondant au temps $T - \tau$, τ étant l'intervalle qui s'écoule entre le moment où l'onde incidente passe par la position S prise pour origine, et celui où elle passe par le point considéré, et ce temps τ étant pris

positivement ou négativement, suivant que le premier de ces deux moments est antérieur ou postérieur au second; l'enveloppe des portions situées dans le second milieu de toutes ces surfaces d'onde caractéristiques est l'onde réfractée demandée. Une construction absolument semblable à la précédente donne la position de l'onde réfléchie au bout du temps T; mais, dans ce cas, les surfaces d'onde caractéristiques qu'on doit décrire des différents points de la surface réfléchissante comme centres sont celles du premier milieu, et c'est l'enveloppe des portions situées dans le premier milieu de ces surfaces d'onde caractéristiques qui est l'onde réfléchie cherchée.

Pour avoir les directions des rayons réfléchis ou réfractés qui proviennent d'un rayon incident donné, il faut chercher les points où la surface d'onde caractéristique, décrite du point A où ce rayon incident rencontre la surface de séparation comme centre, touche l'enveloppe commune, c'est-à-dire l'onde réfléchie ou réfractée, et joindre ces points au point A. Dans le cas de la réflexion, on obtiendra toujours par cette construction un rayon réfléchi unique si le premier milieu est uniréfringent, mais on pourra en trouver deux si ce milieu est biréfringent. Dans le cas de la réfraction, cette construction ne fournira jamais plus d'un rayon réfracté si le second milieu est uniréfringent, mais pourra en donner deux s'il est biréfringent.

Si le second milieu est biréfringent dans le cas de la réfraction, si le premier milieu est biréfringent dans le cas de la réflexion, l'onde réfléchie ou réfractée aura en général deux nappes, ce qui signifie qu'à un système de rayons incidents de même espèce correspondent alors deux systèmes de rayons réfléchis ou réfractés, qui doivent être considérés comme d'espèce différente.

Il peut arriver que la surface d'onde caractéristique décrite, dans la construction précédente, d'un certain point de la surface de séparation comme centre, ne coupe aucune de celles décrites des autres points de cette surface comme centres, et ne touche pas par conséquent l'enveloppe commune; c'est à ce caractère qu'on reconnaîtra l'impossibilité de la réflexion ou de la réfraction. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une réfraction : si, le second milieu étant uniréfringent, la surface d'onde caractéristique décrite d'un certain point A comme centre ne touche pas l'enveloppe commune, cela indique qu'il n'y a pas

réfraction en A, et que, par suite, le rayon incident qui aboutit en A subit en ce point une réflexion totale; si le second milieu est biréfringent, de ce qu'une des nappes de la surface d'onde caractéristique décrite du point A comme centre ne touche pas l'enveloppe commune, il faut conclure qu'il n'y a qu'un seul rayon réfracté; mais lorsqu'aucune des nappes de cette surface ne touche l'enveloppe commune, il y a réflexion totale. Examinons maintenant le cas de la réflexion : si le premier milieu est uniréfringent, chacune des surfaces d'onde caractéristiques touche nécessairement l'enveloppe commune, et, par suite, à chaque rayon incident correspond un rayon réfléchi unique; si le premier milieu est biréfringent, celle des nappes de chacune des surfaces d'onde caractéristiques, qui est de même nature que le rayon incident, touche nécessairement l'enveloppe commune, et, par suite, à chaque rayon incident correspond toujours au moins un rayon réfléchi, qui est le rayon (o, o) ou le rayon (e, e), suivant que le rayon incident est ordinaire ou extraordinaire; mais l'autre rayon réfléchi, le rayon (o, e) ou (e, o), peut manquer, et manque en effet si la nappe de la surface d'onde caractéristique décrite du point d'incidence comme centre, qui est de nature différente de celle des rayons, ne touche pas l'enveloppe commune.

17. La construction générale que nous venons d'exposer permet de trouver l'équation de l'onde réfléchie ou réfractée, considérée dans la position qu'elle occupe au bout d'un temps donné, l'équation qui représente l'onde incidente à un certain moment étant connue.

Soit donnée, en effet, la position de l'onde incidente à un certain moment que nous prendrons pour origine du temps : l'équation de cette onde incidente, dans la position qu'elle occupe au bout d'un temps t, positif ou négatif, compté à partir de cet instant, pourra s'obtenir comme nous l'avons indiqué plus haut (15), et cette équation sera de la forme

$$F(x, y, z, t) = 0;$$

soient d'ailleurs

$$f_1(x, y, z) = 0,$$

et

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

les équations des surfaces d'onde caractéristiques du premier et du second milieu décrites de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps, et enfin

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

l'équation de la surface réfléchissante ou réfringente.

Proposons-nous de trouver l'équation de l'onde réfractée, considérée dans la position qu'elle occupe au bout d'un temps T, compté à partir de l'instant pris pour origine. Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de la surface réfringente atteint par l'onde incidente au bout d'un temps positif ou négatif que nous désignerons par θ; nous aurons

$$F(\xi, \eta, \zeta, \theta) = 0, \tag{1}$$

et

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{2}$$

D'après la construction précédente, il faudra, du point ξ, η, ζ comme centre, décrire la surface d'onde caractéristique du second milieu correspondant au temps $T - \theta$, surface dont l'équation est

$$f_1\left(\frac{x-\xi}{T-\theta}, \frac{y-\eta}{T-\theta}, \frac{z-\zeta}{T-\theta}\right) = 0. \tag{3}$$

L'onde cherchée est l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (3). Pour trouver cette enveloppe, il faudra, en premier lieu, entre les équations (1), (2) et (3), éliminer θ et l'une des trois variables ξ, η et ζ, par exemple ζ, ce qui conduira à une équation ne renfermant plus que deux paramètres variables ξ et η, équation qui sera de la forme

$$\Phi(x, y, z, T, \xi, \eta) = 0.$$

Si, entre cette équation et celles qu'on obtient en la différentiant par rapport aux deux paramètres variables ξ et η, équations qui sont

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = 0,$$

et

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = 0,$$

on élimine les deux variables ξ et η, on arrivera définitivement à une équation de la forme

$$\mathfrak{F}(x, y, z, \mathrm{T}) = 0,$$

qui représentera l'onde cherchée.

La marche à suivre pour trouver l'équation de l'onde réfléchie est absolument semblable à celle que nous venons d'indiquer, avec cette seule différence que, dans l'équation (3), la fonction f_2 doit être remplacée par la fonction f_1, qui représente les surfaces d'onde caractéristiques du premier milieu.

Dans le cas particulier où les directions des rayons incidents concourent en un même point lumineux, réel ou virtuel, l'équation de l'onde incidente devient, en désignant par (a, b, c) les coordonnées du point lumineux, et en comptant le temps à partir de l'instant où la lumière part de ce point,

$$f_1\left(\frac{x-a}{t}, \frac{y-b}{t}, \frac{z-c}{t}\right) = 0,$$

et l'équation (1) prend la forme

$$f_1\left(\frac{\xi-a}{\theta}, \frac{\eta-b}{\theta}, \frac{\zeta-c}{\theta}\right) = 0.$$

18. Afin d'éclaircir par un exemple ce qui précède, nous allons faire le calcul de l'onde réfractée dans le cas simple où, les deux milieux étant isotropes, la surface de séparation est plane et les rayons émanent d'un point situé dans le premier milieu. Nous prendrons la surface réfringente pour plan des xy, et la perpendiculaire abaissée du point lumineux sur ce plan pour axe des z. Nous représenterons par c la distance du point lumineux au plan réfringent, et nous désignerons par v et v' les vitesses de la lumière dans le premier et dans le second milieu. Nous prendrons pour origine du temps le moment où la lumière part du point lumineux, et nous nous proposerons de calculer l'équation de l'onde réfractée dans la position qu'elle occupe lorsque le temps T est égal à zéro. Cette position est évidemment virtuelle, mais nous la choisissons parce que c'est celle où l'onde réfractée a la forme la plus simple. Les équations (1), (2) et (3) deviennent, dans le cas particulier

où nous nous sommes placés,

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2 = v^2\theta^2, \quad \zeta = 0, \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = v'^2\theta^2.$$

En éliminant θ et ζ entre ces trois équations, il vient

$$(\mathrm{A}) \qquad v'^2(\xi^2 + \eta^2 + c^2) = v^2[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2];$$

cette dernière équation différentiée par rapport aux deux paramètres variables ξ et η qu'elle contient donne

$$v'^2\xi + v^2(x-\xi) = 0, \quad v'^2\eta + v^2(y-\eta) = 0,$$

d'où

$$\xi = \frac{v^2 x}{v^2 - v'^2}, \qquad \eta = \frac{v^2 y}{v^2 - v'^2},$$

$$x - \xi = -\frac{v'^2 x}{v^2 - v'^2}, \quad y - \eta = -\frac{v'^2 y}{v^2 - v'^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (A), on obtient pour l'onde réfractée cherchée l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{(v'^2 - v^2)}{v'^2} z^2 = \frac{(v'^2 - v^2)}{v^2} c^2$$

qui, en posant

$$\frac{v}{v'} = n,$$

devient

$$x^2 + y^2 + (1 - n^2) z^2 = \frac{(1 - n^2)}{n^2} c^2.$$

On voit immédiatement que les surfaces que peut représenter cette équation, lorsqu'on donne à n différentes valeurs, sont toutes des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe des z, ayant un de leurs foyers au point lumineux et leur centre à l'origine, c'est-à-dire au pied de la perpendiculaire abaissée du point lumineux sur le plan réfringent. L'onde réfractée correspondant à un temps égal à zéro est un ellipsoïde de révolution si n est plus petit que l'unité, c'est-à-dire si le second milieu est moins réfringent que le premier; c'est un hyperboloïde de révolution lorsque le second milieu est plus réfringent que le premier. Si la position du point lumineux par rapport au plan

réfringent change, c'est-à-dire si l'on fait varier c, le rapport des axes de la courbe méridienne demeure constant, car ce rapport est égal à $\sqrt{n^2-1}$ ou à $\sqrt{1-n^2}$ suivant que n est supérieur ou inférieur à l'unité : il résulte de là que, si la courbe méridienne est une hyperbole, elle conserve les mêmes asymptotes lorsqu'on fait varier c.

D'après le théorème de Malus, les rayons étant toujours normaux à l'onde dans un milieu isotrope, on voit que, lorsque deux milieux isotropes sont séparés par une surface plane, et que les rayons incidents émanent d'un point umineux situé dans le premier milieu, les rayons réfractés sont normaux à une surface de révolution du second degré. Pour avoir l'onde réfractée correspondant à un temps quelconque T, il suffit de porter sur chacune des normales à cette surface une longueur égale à $v'T$; la surface qui passe par tous les points ainsi obtenus sera l'onde cherchée.

19. La construction bien connue indiquée par Huyghens pour trouver la direction du rayon réfléchi ou réfracté, connaissant la direction du rayon incident et aussi celle du plan tangent à la surface réfléchissante ou réfringente au point d'incidence, se déduit aisément de la construction générale de l'onde réfléchie ou réfractée. Il suffit pour cela d'imaginer que le rayon incident fasse partie d'un système de rayons parallèles de même espèce, que la surface de séparation soit plane et que cette surface se confonde avec le plan tangent à la surface réfléchissante ou réfringente au point d'incidence, hypothèses qui ne changent en rien la direction du rayon réfléchi ou réfracté. L'onde incidente est alors plane ainsi que l'onde réfléchie ou réfractée. Soient OA le rayon incident, P l'onde plane incidente passant par le point d'incidence A, P' la position de l'onde plane réfléchie ou réfractée au bout d'un temps égal à l'unité compté à partir du moment où l'onde incidente occupe la position P. L'onde P' est tangente à celle des nappes de la surface d'onde caractéristique décrite du point A comme centre et correspondant à l'unité de temps, qui est de même nature que les rayons auxquels se rapporte cette onde P', cette surface d'onde caractéristique étant celle du premier milieu s'il s'agit d'une réflexion, celle du second s'il s'agit d'une réfraction. En joignant le point de contact au point A, on a le rayon réfléchi ou réfracté cherché. Le plan P' coupe d'ailleurs la

surface plane de séparation des deux milieux suivant la même droite que l'onde incidente considérée dans la position qu'elle occupe au bout de l'unité de temps. Pour trouver cette position de l'onde incidente, il suffit évidemment de décrire, du point A comme centre, la nappe, de même nature que les rayons incidents, de la surface d'onde caractéristique du premier milieu correspondant à l'unité de temps, et de mener à la portion de cette nappe qui est comprise dans le second milieu un plan tangent parallèle au plan P; on peut encore, ce qui revient exactement au même, mener à cette nappe, au point où elle est rencontrée par le rayon incident OA prolongé, un plan tangent, plan qui est nécessairement parallèle au plan P.

Nous arrivons ainsi à la construction suivante, qui n'est autre que celle de Huyghens. Du point d'incidence comme centre, on décrit les surfaces d'onde Σ et Σ' caractéristiques du premier et du second milieu et correspondant à l'unité de temps; par le point de rencontre du rayon incident prolongé avec la surface Σ si le premier milieu est uniréfringent, avec celle des nappes de la surface Σ qui est de même nature que lui si, le premier milieu étant biréfringent, le rayon incident est seulement ordinaire ou seulement extraordinaire, on mène un plan tangent à cette surface ou à cette nappe; si, le premier milieu étant biréfringent, le rayon incident est à la fois ordinaire et extraordinaire, on mène par les points où ce rayon prolongé rencontre les deux nappes de la surface Σ des plans tangents à ces nappes. Pour avoir les rayons réfractés, par la droite ou par les droites d'intersection de ce plan tangent ou de ces plans tangents avec le plan tangent à la surface de séparation au point d'incidence, on mène autant de plans tangents qu'il est possible à la portion de la surface Σ' comprise dans le second milieu, et on joint les points de contact au point d'incidence; pour avoir les rayons réfléchis, on mène par les mêmes droites d'intersection autant de plans tangents qu'il est possible à la portion de la surface Σ comprise dans le premier milieu, et on joint les points de contact au point d'incidence.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter les conséquences connues qui résultent de cette construction pour les milieux biréfringents à deux axes, où la surface d'onde caractéristique présente des points singuliers et des plans tangents singuliers. Les phénomènes particuliers

qui peuvent alors se produire pour certaines directions du rayon incident ont été étudiés au point de vue théorique par Hamilton et expérimentalement par Lloyd, et constituent ce qu'on est convenu d'appeler *la réfraction conique intérieure ou extérieure.*

III. — *Relations entre la direction du rayon et celle du plan tangent à l'onde. — Généralisation du théorème de Malus.*

20. Soit dans un milieu homogène quelconque un système d'ondes correspondant à un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce. Prenons pour point de départ une de ces ondes, que nous désignerons par Σ, et soient S, S′, S″,... les positions occupées successivement par l'onde qui se propage dans le milieu sans se réfléchir ni se réfracter. Considérons un rayon du système qui rencontre l'onde Σ au point O, les ondes S, S′, S″,... aux points A, A′, A″,....

D'après la construction indiquée plus haut (14) et fondée sur le principe des ondes enveloppes, les ondes S, S′, S″,..., aux points A, A′, A″,... sont respectivement tangentes aux nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites du point O comme centre et correspondant à des temps différents. Ces nappes étant des surfaces semblables et semblablement placées par rapport au point O, et les points A, A′, A″,... se trouvant sur une même droite, les plans tangents à ces nappes aux points A, A′, A″,...., et par suite aussi les plans tangents aux ondes S, S′, S″,... en ces mêmes points, sont parallèles entre eux; d'où la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsqu'un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, les plans tangents menés aux ondes qui correspondent à ces rayons aux points où ces ondes sont rencontrées par un même rayon, sont parallèles entre eux.*

Il est à remarquer que ce théorème est vrai, quel que soit le nombre des réflexions et des réfractions qu'ont subies les rayons.

21. Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce se propage

dans un milieu homogène quelconque, la direction d'un de ces rayons est déterminée dès qu'on connaît celle du plan tangent mené à l'une des ondes correspondant au système des rayons, au point où elle est rencontrée par ce rayon, et que, de plus, si le milieu est biréfringent, la nature des rayons est donnée. Soit, en effet, à trouver la direction du rayon qui rencontre l'onde S en un certain point A; d'un point quelconque comme centre on décrira la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu correspondant à un temps quelconque, et on mènera à cette nappe un plan tangent parallèle au plan tangent en A à l'onde S: le rayon vecteur qui joint le point de contact au centre de la surface sera parallèle au rayon qui passe par le point A.

Réciproquement, étant donnée la direction d'un des rayons du système et sa nature, il est facile de trouver la direction commune des plans tangents menés aux ondes aux points où elles sont rencontrées par ce rayon. Il suffit pour cela de décrire, d'un point quelconque comme centre, la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu correspondant à un temps quelconque, et de mener un rayon vecteur de cette surface parallèle au rayon donné : le plan tangent à la nappe ainsi décrite au point où elle est rencontrée par le rayon vecteur aura la direction cherchée.

Ces deux constructions, réciproques l'une de l'autre, peuvent être réunies dans l'énoncé suivant :

Théorème II. — *Lorsqu'un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, il existe, entre la direction du plan tangent à l'onde qui correspond à ces rayons et la direction du rayon qui passe par le point de contact, une liaison qui est constante dans un même milieu homogène pour des rayons de même nature, et cette liaison est la même que celle qui existe entre la direction du plan tangent à la nappe, de même nature que les rayons, d'une des surfaces d'onde caractéristiques du milieu et la direction du rayon vecteur de cette surface qui passe par le point de contact.*

Nous exprimerons la relation qui, dans un milieu homogène, existe entre la direction d'un rayon et celle du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon, en disant que ces deux directions

sont *conjuguées* l'une à l'autre; si le milieu est biréfringent, suivant que le rayon est ordinaire ou extraordinaire, nous dirons que les deux directions sont *conjuguées ordinairement* ou *extraordinairement* l'une à l'autre. Il peut arriver, comme cas particulier, que, dans un milieu biréfringent, les directions des plans conjugués ordinairement et extraordinairement à la direction d'une même droite se confondent : pour cela, il faut et il suffit qu'en décrivant, d'un point quelconque comme centre, les deux nappes d'une surface d'onde caractéristique du milieu, et en menant un rayon vecteur parallèle à cette droite, les plans tangents à ces deux nappes aux points où elles sont rencontrées par ce rayon vecteur, soient parallèles entre eux. Nous exprimerons la relation qui existe entre les directions d'un plan et d'une droite qui sont conjugués à la fois ordinairement et extraordinairement l'un à l'autre, en disant que ces directions sont *doublement conjuguées*. Ainsi, dans un milieu biréfringent à un axe, la direction d'une droite parallèle ou perpendiculaire à l'axe du milieu et celle d'un plan perpendiculaire à cette droite sont doublement conjuguées.

22. Le théorème précédent, dont le théorème de Malus n'est qu'un cas particulier, est la clef de la plupart des questions d'optique géométrique; il joue un rôle important dans la théorie des surfaces caustiques et dans celle des surfaces aplanétiques. Nous allons en développer quelques conséquences immédiates.

Dans les milieux homogènes isotropes ou uniaxes, les surfaces d'onde caractéristiques ne présentant ni points singuliers ni plans tangents singuliers, c'est-à-dire ces surfaces n'étant tangentes en chacun de leurs points qu'à un seul plan, et chacun des plans tangents à ces surfaces ne les touchant qu'en un seul point, à chaque direction donnée pour le rayon est conjuguée une direction unique pour le plan tangent à l'onde, la nature du rayon étant assignée; réciproquement, dans ces milieux, à chaque direction du plan tangent à l'onde est conjuguée une direction unique pour un rayon de nature donnée. Dans les milieux biréfringents à deux axes il en est de même, sauf deux exceptions, qui proviennent de ce que, dans ces milieux, chaque surface d'onde caractéristique présente quatre points singuliers et quatre plans tangents singuliers. Les quatre points singuliers sont ceux où la sur-

face est tangente à un cône au lieu d'être tangente à un plan; ils sont disposés symétriquement deux par deux sur deux droites passant par le centre : nous appellerons les directions de ces deux droites *directions singulières* du milieu. Les plans tangents singuliers sont ceux qui touchent la surface le long d'une courbe au lieu de la toucher en un point unique. Nous allons examiner les particularités qui résultent, pour la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents à deux axes, de l'existence de ces points singuliers et de ces plans tangents singuliers.

23. Soit, dans un milieu biaxe, un rayon faisant partie d'un système de rayons issus d'un même point et de même espèce; si ce rayon se propage parallèlement à l'une des directions singulières du milieu, le théorème II se trouve en défaut et n'est plus suffisant pour déterminer la direction du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que ce plan tangent est parallèle à l'un des plans tangents au cône qui touche la surface d'onde caractéristique du milieu en celui de ses points singuliers qui est situé sur un rayon vecteur parallèle au rayon considéré, et que ce plan tangent reste parallèle à lui-même pendant que l'onde se déplace. En général, l'onde ne présente pas de point singulier au point où elle est rencontrée par un rayon parallèle à l'une des directions singulières du milieu; car, si l'onde en ce point touche une surface d'onde caractéristique du milieu en un de ses points singuliers, il n'en résulte pas qu'elle doive être tangente au cône qui touche en ce point singulier la surface d'onde caractéristique; il suffit que le plan tangent en ce point à l'onde soit aussi tangent à ce cône. La direction du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par un rayon parallèle à l'une des directions singulières du milieu ne peut être en général déterminée d'une manière complète que lorsqu'on connaît les changements de direction et de nature qu'a subis ce rayon avant de se propager suivant la droite qu'il parcourt actuellement.

Il existe cependant un cas tout à fait spécial, où l'on peut affirmer que l'onde présente un point singulier au point où elle est rencontrée par un rayon parallèle à l'une des directions singulières du milieu : c'est celui où ce rayon provient d'une infinité de rayons qui, en se ré-

fractant ou en se réfléchissant, se sont réunis en un seul. Le cône tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon, a alors ses génératrices parallèles à celles du cône tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu en celui de ses points singuliers qui est situé sur le rayon vecteur parallèle au rayon considéré; quand l'onde se propage dans le milieu, son point singulier se déplace en suivant une droite parallèle à l'une des directions singulières du milieu.

24. Dans les milieux biréfringents à deux axes, à chaque plan tangent singulier de la surface d'onde caractéristique sont conjugués une infinité de rayons vecteurs, formant une surface conique et allant aboutir aux différents points de la courbe suivant laquelle ce plan touche la surface.

Il est facile de voir, d'après cela, que, si, parmi les rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un tel milieu, il y en a un qui soit parallèle à l'un des rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique du milieu conjugués à un plan tangent singulier, il y aura nécessairement dans le système une infinité d'autres rayons parallèles chacun à l'un des rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique conjugués à ce même plan tangent singulier. Cela est évident quand les rayons émanent directement d'un point lumineux situé dans le milieu; si, avant de prendre leurs directions actuelles, ils ont subi un certain nombre de réflexions et de réfractions, on peut remarquer que, dans la dernière réflexion ou réfraction, qui a fait prendre à ces rayons leurs directions actuelles, un rayon incident ayant donné naissance à un rayon réfléchi ou réfracté parallèle à l'un des rayons vecteurs dont nous venons de parler, le plan tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point d'incidence comme centre au point où elle est rencontrée par ce rayon réfléchi ou réfracté, touche cette surface suivant une courbe. Donc, d'après la construction de Huyghens, toutes les droites qui joignent les différents points de la portion de cette courbe située dans le milieu au point d'incidence, sont autant de rayons réfléchis ou réfractés provenant du même rayon incident. Ces rayons forment une surface conique, et chaque onde, le long de la courbe suivant laquelle elle est coupée par cette surface conique, est tangente à un même plan,

qui est parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu.

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Théorème III. — *Lorsque, dans un milieu homogène biaxe, se propage un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, si l'on peut mener à l'une quelconque des ondes correspondant à ce système un plan tangent parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu, ce plan touche l'onde le long d'une courbe. Les rayons qui passent par les différents points de cette courbe forment une surface conique dont le sommet se trouve sur la surface où ces rayons ont subi la réflexion ou la réfraction qui leur a donné leurs directions actuelles, ou au point lumineux si les rayons émanent directement d'un point situé dans le milieu. Chacun de ces rayons est parallèle à l'un des rayons vecteurs qui, dans la surface d'onde caractéristique du milieu, sont conjugués au plan tangent singulier de cette surface parallèle au plan tangent singulier de l'onde. Enfin, pendant que l'onde se propage dans le milieu, son plan tangent singulier se déplace en restant parallèle à lui-même.*

Il suit de là que, toutes les fois que, dans un milieu biaxe, le plan tangent à l'onde est parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu, la direction du rayon qui passe par le point de contact est indéterminée, en ce sens que ce rayon peut être parallèle à l'un quelconque des rayons vecteurs conjugués à ce plan tangent singulier.

25. Dans un milieu biréfringent à un axe, les deux nappes de la surface d'onde caractéristique du milieu sont tangentes l'une à l'autre en deux points situés sur une droite passant par le centre commun de ces deux nappes et dont la direction est ce qu'on appelle l'axe du milieu. Concevons dans un tel milieu un système de rayons qui, avant la réflexion ou la réfraction qui leur a donné leurs directions actuelles, étaient de même espèce ; à ces rayons correspond un système d'ondes à deux nappes. Si parmi ces rayons il s'en trouve qui soient parallèles à l'axe du milieu, chacun de ces rayons parallèles à l'axe rencontrera évidemment au même point les deux nappes de chaque onde; car,

suivant la direction de l'axe, les vitesses ordinaire et extraordinaire de la lumière sont égales entre elles. De plus, en ce point commun, les deux nappes de l'onde doivent être tangentes l'une à l'autre, car en ce point le plan tangent à chacune de ces nappes doit être parallèle au plan tangent mené à la nappe correspondante de la surface d'onde caractéristique du milieu au point où elle est rencontrée par l'axe, plan qui est perpendiculaire à l'axe. Donc :

Théorème IV. — *Lorsque dans un milieu biréfringent à un axe se propage un système de rayons issus d'un même point, et qui, avant de subir la réflexion ou la réfraction qui leur a donné leurs directions actuelles, étaient de même espèce, les deux nappes de chacune des ondes correspondant à ce système de rayons sont tangentes l'une à l'autre au point où elles sont rencontrées par tout rayon parallèle à l'axe du milieu, et le plan tangent commun en ce point aux deux nappes de l'onde est perpendiculaire à l'axe.*

26. Dans les milieux isotropes, les rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique sont tous normaux à cette surface, qui est sphérique. Dans les milieux biréfringents à un axe, il en est de même si l'on se borne à considérer la nappe ordinaire de la surface d'onde caractéristique. Cette remarque nous permet de déduire du théorème II le théorème suivant, qui n'est autre que celui de Malus :

Théorème V. — *Lorsque dans un milieu homogène isotrope se propage un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, ou lorsque dans un milieu homogène uniaxe se propage un système de rayons ordinaires issus d'un même point et de même espèce, ces rayons sont toujours normaux à l'onde qui leur correspond, considérée dans une quelconque des positions qu'elle occupe successivement.*

Le théorème de Malus se trouve généralisé dans cet énoncé, en ce sens que les rayons, avant de pénétrer dans le milieu où ils se meuvent actuellement, peuvent avoir traversé des milieux homogènes quelconques, anisotropes aussi bien qu'isotropes, et avoir subi dans ces milieux des réflexions en nombre quelconque, sans que le théorème cesse d'être applicable.

Le théorème V nous conduit au corollaire suivant : les ondes corres-

pondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un milieu isotrope forment un système de surfaces telles, que toute droite normale à l'une d'elles est en même temps normale à toutes les autres; c'est ce qu'on est convenu d'appeler des *surfaces parallèles*. Il en est de même dans un milieu biréfringent à un axe pour les ondes ordinaires. Si l'on considère, au contraire, un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, extraordinaires dans un milieu biréfringent à un axe, ordinaires ou extraordinaires dans un milieu biréfringent à deux axes, on voit que ces rayons, sauf quelques directions particulières, ne sont plus normaux aux ondes, et que celles-ci par conséquent ne constituent plus des surfaces parallèles, du moins dans le sens qu'on attache le plus souvent à cette expression. Ces ondes ont bien leurs plans tangents parallèles en des points situés sur une même droite, mais les droites qui passent par les points de contact des plans tangents parallèles ne sont pas en général normales aux ondes.

La réciproque du théorème V est vraie : si, en effet, dans un milieu homogène peut se propager un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, *non parallèles entre eux*, qui soient tous normaux aux ondes qui leur correspondent, il faudra en conclure que les rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique du milieu, ou du moins de la nappe de cette surface qui correspond aux rayons, sont tous normaux à cette surface ou à cette nappe, qui, par suite, ne peut être que sphérique. Donc :

THÉORÈME VI. — *Lorsque dans un milieu homogène peut se propager un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, non parallèles entre eux, qui soient tous normaux aux ondes qui leur correspondent, ce milieu est isotrope ou biréfringent à un axe, et, dans ce dernier cas, les rayons sont nécessairement ordinaires.*

Si les rayons du système sont tous parallèles entre eux, de ce qu'ils sont perpendiculaires aux ondes qui leur correspondent, il n'est pas permis de conclure que le milieu est isotrope, ni même uniaxe. Il en résulte seulement que le rayon vecteur de la nappe, de même nature que les rayons, de la surface d'onde caractéristique du milieu, mené parallèlement à la direction commune des rayons, est normal à cette nappe,

ce qui peut avoir lieu pour certaines directions du rayon vecteur même dans les milieux biaxes.

27. Du théorème II et des différentes propositions que nous en avons déduites comme corollaires nous pouvons tirer cette conclusion, qui résume tous les développements précédents : si, dans un milieu homogène, les ondes qui correspondent à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce ne présentent pas nécessairement, lorsque ces rayons avant de prendre leurs directions actuelles ont eu à subir un certain nombre de réflexions et de réfractions, la forme des surfaces d'onde caractéristiques du milieu, du moins la nature de ces surfaces d'onde caractéristiques imprime, pour ainsi dire, un cachet spécial à toutes les ondes qui peuvent se propager dans le milieu, surtout en ce qui concerne les relations entre les directions des rayons et celles des plans tangents aux ondes, et certaines particularités de ces surfaces d'onde caractéristiques se trouvent reproduites sur toutes les ondes qui peuvent cheminer dans le milieu.

28. Nous allons maintenant mettre en évidence plusieurs conséquences du théorème II relatives au cas où les rayons qui se propagent dans un milieu homogène sont parallèles entre eux. Remarquons d'abord que, dans un milieu homogène quelconque, en vertu de la construction indiquée précédemment (14), une onde plane, quelle que soit sa direction, reste toujours en se déplaçant plane et parallèle à elle-même. Ceci posé, nous pouvons énoncer les deux propositions suivantes :

Théorème VII. — *Si les rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque sont tous parallèles entre eux, l'onde qui correspond à ces rayons est plane dans chacune des positions qu'elle occupe successivement et se propage en restant parallèle à elle-même.*

En effet, d'après le théorème II, les rayons étant parallèles, le plan tangent à l'onde doit avoir la même direction en tous les points de cette onde, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'onde est plane. La direction de l'onde plane est toujours conjuguée à la direction commune des rayons parallèles, ordinairement ou extraordinairement, suivant que ces rayons sont eux-mêmes ordinaires ou extraordinaires. Par suite, si

le milieu est isotrope ou s'il est uniaxe, les rayons étant ordinaires, le plan de l'onde est toujours perpendiculaire aux rayons parallèles.

Mais, de ce que l'onde plane est perpendiculaire aux rayons parallèles, on peut conclure uniquement que le rayon vecteur de la surface d'onde caractéristique du milieu qui est parallèle à ces rayons est normal à celle des nappes de cette surface qui est de même nature que les rayons; par suite, si le milieu est isotrope ou s'il est uniaxe, les rayons étant ordinaires, ces rayons peuvent avoir une direction quelconque; mais si le milieu est uniaxe et les rayons extraordinaires, ils sont nécessairement parallèles ou perpendiculaires à l'axe du milieu, et si le milieu est biaxe, ils sont nécessairement parallèles à l'un des trois axes de symétrie du milieu.

Le théorème VII souffre une exception très-particulière à la vérité, mais que nous ne devons pas omettre de signaler : cette exception se présente dans le cas où, le milieu étant biaxe, les rayons sont parallèles à l'une des directions singulières du milieu: dans ce cas, comme nous l'avons vu (**23**), la direction du plan tangent à l'onde peut varier, celle du rayon restant constante, et, par suite, bien que les rayons soient parallèles entre eux, l'onde qui leur correspond n'est plus nécessairement plane.

Théorème VIII. — *Si, dans un milieu homogène quelconque, l'onde correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce est plane dans une quelconque des positions qu'elle occupe successivement, tous ces rayons sont parallèles entre eux.*

En effet, la direction du plan tangent à l'onde étant constante aux différents points de cette onde, il doit en être de même de la direction des rayons qui passent par ces points.

Ce théorème est soumis, comme le précédent, à une exception. Si, dans un milieu biaxe, il se propage une onde plane parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu, cette onde reste bien parallèle à elle-même en se déplaçant, mais les rayons qui lui correspondent ne sont plus tous parallèles entre eux. Ces rayons forment alors, en effet, des surfaces coniques dont les sommets se trouvent sur la surface où ces rayons ont subi leur dernière réflexion ou leur dernière réfraction (**24**); les génératrices de tous ces cônes sont

parallèles; il se propage par conséquent dans le milieu une infinité de systèmes de rayons parallèles, chaque système ayant une direction différente, et à tous ces systèmes de rayons correspond un système unique d'ondes planes et parallèles entre elles.

Au lieu de supposer tous les rayons d'un système parallèles entre eux, on peut imaginer qu'une partie seulement de ces rayons, formant une surface continue, soient parallèles; on arrive alors aux théorèmes suivants :

Théorème IX. — *Si, parmi les rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque, il s'en trouve une infinité formant une surface continue qui soient parallèles entre eux, chacune des ondes qui correspondent au système des rayons est tangente à un même plan le long de la courbe suivant laquelle elle est coupée par la surface cylindrique que forment les rayons parallèles.* (*Sauf le cas où, le milieu étant biaxe, les rayons sont parallèles à l'une des directions singulières du milieu.*)

Théorème X. — *Si, dans un milieu homogène quelconque, une onde correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce est tangente à un même plan le long d'une courbe continue, les rayons qui passent par les différents points de la ligne de contact sont parallèles entre eux et forment une surface cylindrique continue, à moins que, le milieu étant biaxe, ce plan ne soit parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu.*

IV. — *Recherche de la surface réfléchissante ou réfringente, étant données l'onde incidente et l'onde réfléchie ou réfractée. — Construction réciproque de celle de Huyghens.*

29. La construction générale de l'onde réfléchie ou réfractée (16) montre immédiatement que la surface réfléchissante ou réfringente peut être considérée comme le lieu des intersections des ondes incidentes avec les ondes réfléchies ou réfractées correspondant au même temps. Cette remarque va nous permettre de résoudre le problème suivant :

Étant données une position réelle S *de l'onde incidente et une position*

également réelle S′ *de l'onde réfléchie ou réfractée, ou d'une des nappes de cette onde, si elle en a deux, et connaissant de plus le temps* T *que met la lumière pour se propager de l'onde* S *à l'onde* S′, *trouver la surface réfléchissante ou réfringente.*

Il s'agit uniquement de déterminer les ondes incidentes et les ondes réfléchies ou réfractées qui correspondent au même temps. Soit une onde incidente postérieure de τ à l'onde S, l'onde réfléchie ou réfractée qui correspond au même temps est antérieure de $T - \tau$ à l'onde S′ si τ est compris entre zéro et T, postérieure de $\tau - T$ à l'onde S′ si τ est plus grand que T; soit maintenant une onde incidente antérieure de τ à l'onde S, l'onde réfléchie ou réfractée qui correspond au même temps est antérieure de $T + \tau$ à l'onde S′. En définitive, la surface réfléchissante ou réfringente est donc le lieu des intersections des ondes incidentes séparées de l'onde S par un intervalle de temps τ, avec les ondes réfléchies ou réfractées séparées de l'onde S′ par un intervalle de temps $T - \tau$, en convenant que l'onde incidente doit être regardée comme postérieure ou comme antérieure à l'onde S, suivant que τ est positif ou négatif, et que l'onde réfléchie ou réfractée doit être considérée comme antérieure ou comme postérieure à l'onde S′, suivant que $T - \tau$ est positif ou négatif; τ devra du reste recevoir toutes les valeurs pour lesquelles il y a intersection. Le problème est impossible lorsque, pour aucune valeur de τ il n'y a intersection entre l'onde incidente et l'onde réfléchie ou réfractée correspondant au même temps. Il est évident d'ailleurs que, quelles que soient les ondes S et S′, il existe toujours certaines valeurs de T pour lesquelles le problème est possible; car, si l'on imagine une onde incidente postérieure de τ à l'onde S, on peut toujours trouver pour T une valeur telle, que cette onde incidente soit coupée par l'onde réfléchie antérieure de $T - \tau$ à l'onde S′. Si l'on donne à T toutes les valeurs pour lesquelles le problème comporte une solution, on obtient le système des surfaces réfléchissantes ou réfringentes qui peuvent transformer l'onde incidente S dans l'onde réfléchie ou réfractée S′.

Comme cas particulier, on peut supposer que les ondes S et S′ se réduisent chacune à un point, c'est-à-dire chercher les surfaces réfléchissantes ou réfringentes qui font converger en un point donné les rayons émanés d'un point lumineux également donné; ces surfaces reçoivent

la qualification d'*aplanétiques*, et leur théorie complète exige des développements assez étendus, qui feront l'objet d'un chapitre spécial.

30. Revenons maintenant au cas général et proposons-nous de le traiter par le calcul. Étant donnée l'équation de l'onde incidente S, connaissant de plus la nature des rayons et par suite l'équation de la nappe, de même nature que ces rayons, de la surface d'onde caractéristique du premier milieu, on peut, en suivant la marche indiquée au n° 15, trouver l'équation de l'onde incidente postérieure de τ à l'onde S, équation qui sera de la forme

$$F(x, y, z, \tau) = 0.$$

De même, étant donnée l'équation de l'onde réfléchie ou réfractée S', connaissant de plus la nature des rayons réfléchis ou réfractés, et par suite l'équation de la nappe, de même nature que ces rayons, de la surface d'onde caractéristique du milieu où ils se propagent, on peut, en suivant une marche analogue, trouver l'équation de l'onde réfléchie ou réfractée postérieure de t à l'onde S', équation qui sera de la forme

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0.$$

D'après la construction indiquée dans le paragraphe précédent, on obtiendra l'équation des surfaces réfléchissantes ou réfringentes capables de transformer l'onde incidente S dans l'onde réfléchie ou réfractée S', en éliminant τ entre les deux équations

$$F(x, y, z, \tau) = 0$$

et

$$\mathcal{F}(x, y, z, \tau - T) = 0,$$

ce qui conduira à une équation de la forme

$$\Phi(x, y, z, T) = 0,$$

où T pourra recevoir toutes les valeurs possibles.

31. Soit S une onde correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce; supposons que ces rayons, après avoir subi un nombre quelconque de réflexions et de réfractions en traversant un nombre quelconque de milieux homogènes, isotropes ou ani-

sotropes, restent de même espèce, et soit alors S′ une des ondes qui leur correspondent. D'après ce que nous venons de voir, il est toujours possible de trouver une surface réfléchissante ou réfringente capable de transformer l'onde S dans l'onde S′; si nous remarquons, de plus, que, dans le même milieu, la nature des rayons étant donnée, aux mêmes systèmes d'ondes correspondent nécessairement les mêmes systèmes de rayons, nous sommes conduits au théorème suivant, démontré par Gergonne (*) pour le cas particulier des milieux isotropes, et qui se trouve étendu à toute espèce de milieux homogènes.

THÉORÈME XI. — *Lorsque des rayons issus d'un même point et de même espèce subissent un nombre quelconque de réflexions et de réfractions en traversant un nombre quelconque de milieux homogènes, isotropes ou anisotropes, l'effet de ces réflexions et de ces réfractions peut toujours être remplacé, soit par celui d'une réflexion unique, soit par celui d'une réfraction unique.*

32. La construction de Huyghens permet encore, étant données la direction d'un rayon incident et celle d'un rayon réfléchi ou réfracté provenant de ce rayon incident, de déterminer la direction du plan tangent à la surface réfléchissante ou réfringente au point d'incidence, en supposant la nature de chacun de ces rayons connue si le milieu où il se propage est biréfringent. A cet effet, du point d'incidence comme centre on décrit les surfaces d'onde Σ et Σ' caractéristiques du premier et du second milieu, et correspondant à l'unité de temps; par le point où le rayon incident rencontre celles des nappes de la surface Σ qui est de même nature que lui, on mène un plan tangent P à cette nappe : par le point où le rayon réfléchi rencontre celle des nappes de la surface Σ qui est de même nature que lui, ou bien par le point où le rayon réfracté rencontre celle des nappes de la surface Σ' qui est de même nature que lui, on mène un plan tangent P′ à cette nappe. Enfin, par la droite d'intersection des plans P et P′ et par le point d'incidence on fait passer un plan, qui est le plan cherché. Si les deux plans tangents P et P′ sont parallèles entre eux, le plan demandé est parallèle à ces deux plans. La droite d'intersection des plans P et P′ ne pouvant jamais passer par le

(*) GERGONNE, *Annales*, t. XIV, p. 129.

point d'incidence, la construction que nous venons d'indiquer donne toujours un plan et un seul, sauf le cas particulier où, l'un des deux milieux étant biaxe, le rayon incident ou le rayon réfléchi, si c'est le premier milieu, le rayon réfracté, si c'est le second, rencontre la surface d'onde caractéristique de ce milieu en un de ses points singuliers. Cependant le problème n'est possible, quelles que soient les directions données pour les deux rayons, que s'il s'agit d'une réflexion homologue. S'il y a réfraction ou réflexion antilogue, le problème peut devenir impossible pour certaines directions des rayons donnés : c'est ce qui arrive, dans le cas de la réfraction, si le plan déterminé par la construction que nous venons d'indiquer est compris dans l'angle formé par le rayon incident prolongé et par le rayon réfracté, et pour la réflexion antilogue si ce plan est compris dans l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi.

33. Nous allons maintenant nous proposer de chercher les conditions qui doivent être remplies pour qu'un rayon se réfléchisse en revenant sur lui-même ou se réfracte sans déviation.

Considérons en premier lieu le cas d'une réflexion homologue. Si un rayon se réfléchit alors de façon à revenir sur lui-même, la construction du paragraphe précédent montre immédiatement que le plan tangent à la surface réfléchissante au point d'incidence est parallèle au plan tangent mené à celle des nappes de la surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point d'incidence comme centre et correspondant à l'unité de temps qui est de même nature que le rayon incident, au point où cette nappe est rencontrée par le rayon incident prolongé. La construction de Huyghens montre d'ailleurs que cette condition est suffisante. Donc :

THÉORÈME XII. — *Pour qu'un rayon qui se propage dans un milieu homogène quelconque se réfléchisse en revenant sur lui-même, la réflexion étant homologue, il faut et il suffit que le plan tangent à la surface réfléchissante au point d'incidence ait une direction conjuguée à celle du rayon incident, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature de ce rayon.*

Si le milieu est isotrope, ou si le milieu est uniaxe et le rayon ordi-

naire, pour qu'un rayon revienne sur lui-même par suite d'une réflexion homologue, il faut et il suffit, d'après le théorème précédent, que ce rayon soit normal à la surface réfléchissante.

En passant au cas de la réfraction, nous pouvons nous proposer, étant données la direction d'un rayon incident et sa nature, ainsi que la nature du rayon réfracté, de déterminer la direction que doit avoir le plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient sur le prolongement l'un de l'autre. La construction de Huyghens nous fournit encore la solution de ce problème. D'un point quelconque O comme centre on décrit les nappes Σ et Σ' des surfaces d'onde caractéristiques des deux milieux correspondant à l'unité de temps qui sont respectivement de même nature que le rayon incident et que le rayon réfracté; par le point O on mène une droite parallèle à la direction donnée pour le rayon incident; cette droite rencontre les nappes Σ et Σ' en deux points, situés du même côté du point O, par où on mène deux plans tangents P et P' à ces deux nappes; enfin, par la droite d'intersection des deux plans P et P' et par le point O on fait passer un plan, dont la direction est la direction cherchée. On voit que ce problème comporte toujours une solution et une seule.

Lorsque les nappes Σ et Σ' sont semblables et semblablement placées, les plans P et P' sont parallèles entre eux, et, par suite, pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient en ligne droite, il faut que le plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence soit parallèle aux plans P et P'. Cette condition est évidemment suffisante; donc :

Théorème XIII. — *Lorsque les nappes des surfaces d'onde caractéristiques de deux milieux homogènes qui correspondent respectivement au rayon incident et au rayon réfracté sont semblables et semblablement placées, pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient sur le prolongement l'un de l'autre, il faut et il suffit que le plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence ait la direction qui, dans l'un et l'autre milieu, est conjuguée à celle du rayon incident, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature de ce rayon.*

On peut remarquer que, dans ce cas, le rayon incident et le rayon réfracté sont toujours de même nature. On voit encore que, si les nappes

des surfaces d'onde caractéristiques des deux milieux qui correspondent respectivement au rayon incident et au rayon réfracté sont sphériques, pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient sur le prolongement l'un de l'autre, il faut et il suffit que le rayon incident soit normal à la surface réfringente.

Un problème inverse du précédent est celui qui consiste, étant données la direction du plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence, la nature du rayon incident et celle du rayon réfracté, à chercher la direction que doit avoir le rayon incident pour pénétrer dans le second milieu sans se briser. Pour répondre à cette question, on décrit encore d'un point quelconque O comme centre les nappes Σ et Σ'; on mène par le point O un plan parallèle au plan donné, et on cherche sur ce plan une droite telle, que les plans tangents menés par cette droite aux parties des nappes Σ et Σ' qui se trouvent d'un même côté de ce plan touchent ces surfaces en deux points qui soient en ligne droite avec le point O : la droite qui passe par le point O et par les deux points de contact a la direction cherchée.

Quant au cas où un rayon doit se réfléchir en revenant sur lui-même, la réflexion étant antilogue, il se traite en suivant exactement la même marche que pour la réfraction ; les surfaces Σ et Σ' sont alors les deux nappes de la surface d'onde caractéristique du premier milieu ; ces deux nappes ne pouvant jamais être semblables, il n'y a pas lieu d'énoncer une proposition analogue au théorème XIII.

V. — *Des foyers totaux et partiels et des lignes focales. — Tautochronisme des trajectoires lumineuses aboutissant au même foyer.*

34. Supposons que dans un milieu homogène quelconque, isotrope ou anisotrope, tous les rayons réfléchis ou réfractés d'une certaine espèce soient dirigés de façon à concourir en un foyer total O, réel ou virtuel. Soit S une quelconque des ondes réelles ou virtuelles qui correspondent à ce système de rayons ; prenons sur cette onde un point quelconque A ; si du point O comme centre nous décrivons la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du

milieu correspondant à un temps tel, que cette nappe passe en A, cette nappe sera, en vertu du théorème II, tangente en A à l'onde S. Ce raisonnement étant applicable à tous les points de l'onde S, cette onde doit être en chacun de ses points tangente à la nappe, de même nature que les rayons, d'une certaine surface d'onde caractéristique décrite du point O comme centre. Si cette surface d'onde caractéristique n'était pas la même pour tous les points de l'onde S, cette onde envelopperait des nappes de même nature de surfaces d'onde caractéristiques décrites d'un même point O comme centre et correspondant à des temps différents, ce qui est impossible, puisque ces nappes ne pourraient se couper. L'onde S est donc tangente en tous ses points à la nappe, de même nature que les rayons, d'une même surface d'onde caractéristique décrite du point O comme centre, et, par suite, coïncide avec cette nappe. Réciproquement, si une quelconque des ondes, réelles ou virtuelles, correspondant au système des rayons, coïncide avec la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu décrite d'un certain point O comme centre, les directions de tous les rayons du système concourent au point O. En effet, si cette condition est remplie, les directions conjuguées, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons, aux plans tangents menés à cette onde en ses différents points, passent tous par le point O; or, d'après le théorème II, ces directions sont précisément celles des rayons qui passent par les différents points de l'onde; donc ces rayons concourent tous en O.

Nous arrivons ainsi au théorème fondamental dont voici l'énoncé :

Théorème XIV. — *Pour que tous les rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et d'une certaine espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque convergent en un foyer total* O, *réel ou virtuel, il faut et il suffit que l'onde qui correspond à ce système de rayons, considérée dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, coïncide avec la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point* O *comme centre. D'où il suit : 1° que l'onde au moment où elle passe par le foyer total se réduit à un point; 2° que si, dans un milieu homogène quelconque, tous les rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et d'une certaine espèce vien-*

nent converger en un même foyer réel, tous ces rayons emploient des temps égaux pour se propager du point lumineux au foyer, et y arrivent par conséquent sans différence de phase.

Ce théorème est vrai, quelles que soient les réflexions et les réfractions que les rayons aient subies avant de prendre leurs directions actuelles, à condition cependant que ces rayons émanent originairement d'un même point et qu'ils soient restés de même espèce.

Le tautochronisme des trajectoires lumineuses aboutissant au même foyer constitue une proposition d'une importance capitale : c'est la base principale de la théorie des surfaces aplanétiques, et on doit nécessairement y avoir recours pour justifier l'emploi des lentilles dans l'observation des phénomènes d'interférences et de diffraction (*).

Il résulte du théorème précédent que, pour que les ondes réfléchies ou réfractées qui se propagent dans un milieu homogène quelconque affectent la forme que présente dans ce milieu celle des nappes de la surface d'onde caractéristique qui est de même nature que ces ondes, il faut et il suffit que tous les rayons réfléchis ou réfractés soient dirigés de façon à concourir en un même point.

Remarquons enfin que, si du foyer total O comme centre on décrit la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique correspondant à un temps quelconque T, cette nappe coïncide à la fois avec deux ondes, savoir : avec celle qui est antérieure de T au moment où l'onde se réduit au foyer total, et avec celle qui est postérieure de T à ce même moment. Si les rayons réfléchis ou réfractés ne remplissent pas tout l'espace, ces deux ondes coïncideront avec deux parties de la surface d'onde caractéristique qui seront limitées par deux courbes symétriques par rapport au foyer et pouvant empiéter l'une sur l'autre. Mais, si les rayons réfléchis ou réfractés, avant d'arriver au foyer, remplissent tout l'espace, comme cela a lieu, par exemple, lorsque des rayons, émanés d'un point lumineux situé dans un milieu homogène limité par une surface fermée, viennent après réflexion con-

(*) Ce théorème est connu depuis longtemps pour les milieux isotropes. Huyghens (*Traité de la Lumière*, chap. VI) en a donné une démonstration, en s'appuyant sur les lois de la réflexion et de la réfraction dans ces milieux. Il restait à faire voir qu'il s'applique également aux milieux biréfringents.

verger en un foyer unique, les deux ondes coïncident chacune avec la nappe de la surface d'onde caractéristique dans toute l'étendue de cette nappe, et, par suite, coïncident entre elles.

35. Il peut arriver que, parmi les rayons réfléchis ou réfractés d'une certaine espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque, il y en ait seulement une partie, formant une surface conique, qui convergent en un même foyer réel ou virtuel : ce foyer prend alors le nom de *foyer partiel*. En employant exactement le même mode de raisonnement que dans le paragraphe précédent, on arrive à la proposition suivante :

THÉORÈME XV. — *Pour que, parmi les rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et d'une certaine espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque, il y en ait une infinité formant une surface continue qui aillent converger en un foyer partiel* O, *réel ou virtuel, il faut et il suffit que l'onde qui correspond à ce système de rayons, considérée dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, soit tangente le long de la courbe suivant laquelle elle est coupée par la surface que forment les rayons à la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point* O *comme centre. D'où il suit que, si, dans un milieu homogène quelconque, une infinité de rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et de même espèce, formant une surface continue, convergent en un même foyer partiel réel, ces rayons emploient des temps égaux pour se propager du point lumineux à ce foyer, et y arrivent par conséquent sans différence de phase.*

Il peut arriver, comme cas particulier, que la surface conique formée par les rayons dont les directions convergent au foyer partiel O se réduise à une surface plane : le théorème précédent subsiste alors sans modification.

36. Lorsqu'un système de rayons issus d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, il peut se présenter quatre cas distincts :

1° Il n'y a ni foyer total ni foyer partiel;

2° Il y a un nombre fini de foyers partiels isolés les uns des autres;

nous appellerons alors *lignes aplanétiques*, soit sur la surface réfléchissante ou réfringente, soit sur les ondes qui correspondent au système des rayons, les intersections de ces surfaces avec les cônes formés par les rayons qui convergent au même foyer partiel, ces surfaces coniques pouvant dans des cas particuliers se réduire à des plans;

3° Il y a une infinité de foyers partiels formant une ligne continue que nous nommons *ligne focale;* il existe alors sur la surface réfléchissante ou réfringente et sur chacune des ondes qui correspondent au système des rayons réfléchis ou réfractés un système continu de lignes aplanétiques, et le système des rayons se décompose en une infinité de surfaces coniques dont les sommets forment une ligne continue;

4° Il y a un foyer total, et alors la surface réfléchissante ou réfringente est dite *aplanétique*.

Ce dernier cas vient d'être étudié (**34**); nous nous arrêterons maintenant quelque temps à examiner les conséquences qui résultent de l'existence d'une ligne focale. Cette ligne focale peut être, soit tout entière réelle, soit tout entière virtuelle, soit en partie réelle et en partie virtuelle; mais il y a, en outre, une distinction essentielle à faire, suivant que les rayons emploient des temps égaux ou inégaux pour aller de l'onde réfléchie ou réfractée considérée dans une quelconque des positions réelles ou virtuelles qu'elle occupe successivement aux différents points de la ligne focale (en supposant, si cela est nécessaire pour l'évaluation de ces temps, le milieu où se meuvent les rayons prolongé au delà de ses limites, de façon à comprendre l'onde et la ligne focale). Si ces temps sont égaux, nous dirons que la ligne focale est *isochrone;* dans le cas contraire, nous l'appellerons *anisochrone*. On voit que, lorsqu'une ligne focale réelle est isochrone, tous les rayons réfléchis ou réfractés emploient le même temps pour se propager du point lumineux aux différents points de cette ligne focale, tandis qu'en général ce sont seulement les rayons aboutissant à un même point de la ligne focale qui mettent des temps égaux pour atteindre ce foyer partiel.

37. Soit, dans un milieu homogène quelconque, L une ligne focale isochrone, réelle ou virtuelle. D'après le théorème XV, si on considère l'onde S qui correspond au système des rayons réfléchis ou réfractés dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, cette onde doit

être tangente le long d'une courbe aux nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'ondes caractéristiques décrites de chacun des points de la ligne L comme centres. Pour que la ligne focale soit isochrone, il faut évidemment que ces surfaces d'onde caractéristiques, décrites des différents points de la ligne L comme centres, et dont chacune est tangente à l'onde S le long d'une courbe, correspondent au même temps. Réciproquement, si cette condition est remplie, les rayons vont aboutir aux différents points de la ligne L et emploient des temps égaux pour aller de l'onde S à la ligne L qui, par suite, est isochrone. Donc :

Théorème XVI. — *Pour que, des rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et de même espèce se propageant dans un milieu quelconque, une ligne* L *soit pour ces rayons une ligne focale isochrone, il faut et il suffit que l'onde qui correspond à ces rayons soit dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles l'enveloppe des nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites des différents points de la ligne* L *comme centres et correspondant à un même temps. D'où il suit que l'onde dans une certaine position, soit réelle, soit virtuelle, doit se réduire à la ligne focale isochrone.*

Si, par exemple, le milieu est isotrope, l'onde est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt la ligne focale isochrone et dont le rayon reste constant.

Lorsqu'il existe une ligne focale isochrone, chaque onde correspondant au système des rayons réfléchis ou réfractés présente un système continu de lignes aplanétiques. Pour trouver sur l'une de ces ondes la ligne aplanétique qui correspond à un point donné de la ligne focale, il suffit évidemment de décrire, de ce point comme centre, une surface d'onde caractéristique dont la nappe, de même nature que les rayons, soit tangente à l'onde ; le contact entre les deux surfaces a lieu le long d'une ligne qui est la ligne aplanétique cherchée. Sur la surface réfléchissante ou réfringente il est également facile de trouver la ligne aplanétique qui correspond à un point donné A de la ligne focale isochrone. En effet, comme dans une de ses positions l'onde se réduit à cette ligne, on obtient les rayons qui convergent en A en menant les droites dont les directions sont conjuguées ordinairement ou extraordi-

nairement suivant la nature des rayons, à celles des plans tangents à la ligne focale en A, c'est-à-dire de tous les plans qui passent par la droite tangente en A à cette ligne. Ces rayons forment une surface conique pouvant, dans des cas particuliers, se réduire à une surface plane et dont l'intersection avec la surface réfléchissante ou réfringente est la ligne aplanétique demandée.

Si le milieu est isotrope ou si le milieu est uniaxe et les rayons ordinaires, les rayons qui convergent en un même point A de la ligne focale isochrone doivent être perpendiculaires aux plans tangents en A à cette ligne focale, et, par suite, à la tangente menée à cette ligne par le point A. Ces rayons sont donc tous contenus dans un même plan normal en A à la ligne focale; d'où le théorème suivant :

THÉORÈME XVII. — *Si, dans un milieu homogène isotrope ou dans un milieu homogène uniaxe, les rayons étant ordinaires, des rayons issus d'un même point et de même espèce donnent naissance à une ligne focale isochrone, ceux de ces rayons dont les directions convergent en un même point réel ou virtuel de cette ligne sont contenus dans un même plan normal à la ligne focale, et par suite les lignes aplanétiques, tant sur la surface réfléchissante ou réfringente que sur les ondes qui correspondent au système des rayons, sont planes.*

38. Quand il existe une ligne focale anisochrone, l'onde, considérée dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, est encore l'enveloppe des nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites des différents points de cette ligne comme centres; mais ces surfaces d'onde caractéristiques ne correspondent plus à des temps égaux. Les lignes aplanétiques sur les ondes qui correspondent au système des rayons réfléchis ou réfractés, s'obtiennent dans ce cas par la même construction que dans le cas d'une ligne focale isochrone (**37**); cette construction est encore applicable lorsqu'il existe un nombre fini de foyers partiels isolés.

Quand la ligne focale est anisochrone, l'onde ne se réduit à cette ligne dans aucune de ses positions, soit réelles, soit virtuelles; elle passe donc successivement par les différents points de cette ligne. Considérons l'onde dans la position réelle ou virtuelle où elle passe par un point quelconque A de la ligne focale anisochrone : d'après le théo-

rème XV, tous les rayons qui convergent en A arrivent en même temps en ce point. L'onde au point A doit donc être tangente à la fois à tous les plans conjugués aux rayons qui arrivent en A, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons; l'enveloppe de ces plans est en général une surface conique, mais cette surface peut se réduire à une ligne droite : c'est ce qui arrive, par exemple, si, le milieu étant isotrope, les rayons qui aboutissent en A sont contenus dans un même plan.

Il résulte de ce que nous venons de dire que l'onde présente en A ce qu'on appelle *un point singulier;* il n'y a d'exception à cette règle que dans un cas très-particulier : c'est celui où, le milieu étant biaxe, chacun des rayons qui convergent en A est parallèle à l'un des rayons vecteurs qui, dans la surface d'onde caractéristique du milieu, sont conjugués aux plans tangents singuliers. Tout ce que nous venons de dire s'applique évidemment au cas où l'onde passe par un foyer partiel isolé. Réciproquement, si l'onde, dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, présente un point singulier, on peut affirmer que ce point appartient à une ligne focale anisochrone, ou constitue un foyer partiel isolé; car, en ce point, l'onde est tangente à une infinité de plans ayant pour enveloppe une surface conique, ou, dans des cas particuliers, une ligne droite, et à ces plans sont conjugués une infinité de rayons formant une surface conique qui peut se réduire à une surface plane. Ici encore la règle générale présente une exception particulière : en effet, si, le milieu étant biaxe, la surface conique tangente à l'onde au point singulier a ses génératrices parallèles à celles du cône tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu en un de ses points singuliers, à tous les plans tangents à l'onde au point singulier est conjuguée une direction unique, qui est l'une des directions singulières du milieu; il ne passe alors en A qu'un rayon unique, mais ce rayon, d'après une remarque faite précédemment (23), est constitué par la superposition d'une infinité de rayons réfléchis ou réfractés provenant d'un cône de rayons incidents.

Les remarques précédentes se résument dans le théorème suivant :

Théorème XVIII. — *Toutes les fois que, dans un milieu homogène quelconque, l'onde correspondant à un système de rayons issus d'un même*

point et de même espèce passe par un foyer partiel réel ou virtuel ne faisant pas partie d'une ligne focale isochrone, elle présente en ce foyer un point singulier, à moins que, le milieu étant biaxe, le plan tangent à l'onde, mené par ce foyer, ne soit parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu. Réciproquement, toutes les fois que l'onde, dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, présente un point singulier, ce point est un foyer partiel n'appartenant pas à une ligne focale isochrone, à moins que, le milieu étant biaxe, le cône tangent à l'onde en ce point singulier n'ait ses génératrices parallèles à celles du cône tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu en un de ses points singuliers.

De ce théorème résulte une construction qui permet de trouver sur la surface réfléchissante ou réfringente la ligne aplanétique qui correspond à un point d'une ligne focale anisochrone ou à un foyer partiel isolé. En effet, sauf l'exception signalée plus haut, l'onde, lorsqu'elle passe par un tel point, y est tangente à un cône; si l'on mène par le point singulier de l'onde les droites dont les directions sont conjuguées, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons, à celles des plans tangents à ce cône, ces droites forment une surface conique dont l'intersection avec la surface réfléchissante ou réfringente est la ligne aplanétique cherchée.

Si le milieu est isotrope, le cône formé par les rayons qui aboutissent au foyer partiel a ses génératrices perpendiculaires à celles du cône tangent à l'onde en ce foyer partiel, et alors le premier cône se réduit à une surface plane lorsque le second se réduit à une ligne droite.

39. Les remarques que nous venons de faire sur les relations entre l'existence des foyers ou des lignes focales et les affections présentées par les ondes, peuvent se résumer comme il suit :

1° Si l'onde qui correspond à un système de rayons réfléchis ou réfractés, issus d'un même point et de même espèce, se propageant dans un milieu homogène quelconque, ne se réduit, dans aucune des positions réelles et virtuelles qu'elle occupe successivement, à un point ou à une ligne, et que, dans aucune de ses positions, elle ne présente de point singulier, il n'y a ni foyer total, ni foyer partiel (à moins que, le milieu étant biaxe, une infinité de rayons incidents, formant une sur-

31.

face continue, ne donnent naissance à une infinité de faisceaux coniques de rayons réfléchis ou réfractés, qui, en s'entre-croisant, peuvent donner lieu à des foyers partiels sans que l'onde présente de point singulier).

2° Si l'onde, sans jamais se réduire ni à un point ni à une ligne, présente, dans une ou plusieurs positions isolées, un ou plusieurs points singuliers, ces points singuliers sont autant de foyers partiels isolés (toutefois, si le milieu est biaxe, les points singuliers de l'onde où le cône tangent à l'onde a ses génératrices parallèles à celles de l'un des cônes tangents à la surface d'onde caractéristique du milieu en ses points singuliers, sont la reproduction des points singuliers de cette surface d'onde caractéristique et n'accusent pas l'existence de foyers partiels).

3° Si l'onde, sans jamais se réduire ni à un point ni à une ligne, présente, dans une série continue de positions, un point singulier, la ligne décrite par ce point est une ligne focale anisochrone (sauf l'exception indiquée dans le cas précédent).

4° Si l'onde, dans une certaine position, soit réelle, soit virtuelle, se réduit à une ligne, cette ligne est une ligne focale isochrone.

5° Si l'onde, dans une certaine position, soit réelle, soit virtuelle, se réduit à un point, ce point est un foyer total.

VI. — *Propriété fondamentale des trajectoires lumineuses : le temps employé à les parcourir est en général un minimum ou un maximum.*

40. Quoique nous ne nous proposions pas d'exposer ici spécialement la théorie des surfaces aplanétiques, il est cependant indispensable, pour arriver à la démonstration simple et générale d'une propriété fondamentale des trajectoires lumineuses, d'entrer plus avant que nous ne l'avons fait jusqu'à présent dans l'étude de ces surfaces.

Supposons que tous les rayons réfléchis ou réfractés d'une certaine espèce qui correspondent à des rayons incidents émanés d'un point lumineux réel O, aillent converger en un même foyer réel O'. Désignons par T le temps employé par un rayon de même nature que les rayons incidents pour se propager dans le premier milieu du point O à un point quelconque M; par T' le temps employé par un rayon de même

nature que les rayons réfléchis ou réfractés pour se propager, dans le second milieu s'il s'agit d'une réfraction, dans le premier milieu s'il s'agit d'une réflexion, du point O′ au même point M. Il résulte immédiatement du théorème XIV que, pour tous les points de la surface réfléchissante ou réfringente, la somme $T + T'$ est constante, et que, réciproquement, si cette somme est constante sur une surface réfléchissante ou réfringente, cette surface est aplanétique pour les positions O et O′ du point lumineux et du foyer. On voit donc, qu'étant données les positions du point lumineux et du foyer, supposés tous deux réels, et la nature des rayons incidents étant assignée ainsi que celle des rayons réfléchis ou réfractés, il existe une infinité de surfaces aplanétiques constituant un certain système. Sur chacune des surfaces de ce système la somme $T + T'$ a une valeur constante; mais cette somme varie quand on passe d'une de ces surfaces à une autre; d'où il suit que les surfaces aplanétiques faisant partie d'un même système ne peuvent jamais se couper et s'enveloppent complétement les unes les autres.

Considérons en premier lieu le cas de la réflexion : les surfaces aplanétiques qui correspondent à des positions données du point lumineux O et du foyer O′ supposés tous deux réels, sont alors fermées, et chacune d'elles comprend dans son intérieur les points O et O′. De plus, il est évident que la somme $T + T'$, constante sur chacune de ces surfaces, va en augmentant à mesure que l'on considère une surface de plus en plus éloignée des points O et O′, ou, en d'autres termes, quand on passe d'une surface aplanétique à une autre qui renferme la première dans son intérieur. Il résulte de là que, si l'on désigne par C la valeur particulière de la somme $T + T'$ sur l'une de ces surfaces aplanétiques, surface que nous nommerons S, pour tout point extérieur à la surface S, la somme $T + T'$ aura une valeur supérieure à C, et pour tout point intérieur à cette surface, cette somme aura une valeur inférieure à C. On voit encore que, si, en un point quelconque de la surface S, on mène un plan tangent à cette surface, la somme $T + T'$ aura, en tous les points de ce plan autres que le point de contact, une valeur supérieure à celle qu'elle prend en ce point de contact, c'est-à-dire une valeur supérieure à C; elle aura donc sur le plan, au point de contact, une valeur minimum.

Passons maintenant au cas de la réfraction. Les surfaces aplanétiques passent alors nécessairement entre les points O et O′. Supposons

d'abord que, suivant la direction OO', la vitesse dans le premier milieu d'un rayon de même nature que les rayons incidents, soit plus grande que la vitesse dans le second milieu d'un rayon de même nature que les rayons réfractés; la somme T + T' va alors en croissant à mesure que la surface aplanétique rencontre la droite OO' en un point plus voisin du point O. De plus, dans ce cas, les surfaces aplanétiques, du moins dans la partie de leur étendue qui sert réellement à la réfraction, tournent leur convexité vers le point O. Ceci posé, désignons par C la valeur de la somme T + T' sur l'une de ces surfaces aplanétiques, surface que nous appellerons S, et soit M un point qui n'est assujetti qu'à la condition de se trouver sur la partie de l'une quelconque des surfaces aplanétiques du système qui sert réellement à la réfraction. On doit conclure de ce qui précède qu'au point M la somme T + T' a une valeur supérieure à C si ce point se trouve à l'extérieur de la surface S, c'est-à-dire du même côté de cette surface que le point O, une valeur inférieure à C si ce point est situé à l'intérieur de la surface S, c'est-à-dire du même côté que le point O'.

Si, au contraire, suivant la direction OO', la vitesse dans le premier milieu d'un rayon de même nature que les rayons incidents, est plus petite que la vitesse dans le second milieu d'un rayon de même nature que les rayons réfractés, la somme T + T' va en croissant à mesure que la surface aplanétique rencontre la droite OO' en un point plus voisin du point O'. Mais, comme alors les surfaces aplanétiques, du moins dans la partie de leur étendue qui sert réellement à la réfraction, tournent leur convexité vers le point O', on voit que, comme dans le cas précédent, la somme T + T' a une valeur supérieure à C au point M si ce point se trouve à l'extérieur de la surface S, c'est-à-dire ici du même côté de cette surface que le point O', une valeur inférieure à C si ce point est situé à l'intérieur de cette surface, c'est-à-dire du même côté que le point O.

Dans l'un et l'autre cas, si l'on mène à l'une des surfaces aplanétiques un plan tangent en un point situé dans la partie de cette surface qui sert réellement à la réfraction, tous les points de ce plan autres que le point de contact étant extérieurs à la surface aplanétique, la somme T + T' aura sur le plan au point de contact une valeur minimum. Les surfaces aplanétiques, soit par réflexion, soit par réfraction, étant tou-

jours convexes, la proposition que nous venons d'énoncer, de même que la proposition analogue relative à la réflexion, ne souffre aucune exception.

41. Supposons maintenant que la lumière se propage d'un point O à un autre point O' en subissant une réflexion ou une réfraction, ces deux points étant situés dans un milieu homogène quelconque s'il s'agit d'une réflexion, dans deux milieux homogènes quelconques s'il s'agit d'une réfraction, et la surface réfléchissante ou réfringente étant également quelconque. Appelons R le rayon incident, R' le rayon réfléchi ou réfracté, I le point d'incidence, S la surface réfléchissante ou réfringente; désignons par T le temps que met, dans le premier milieu, un rayon de même nature que le rayon R pour se propager du point O à un point quelconque M, par T' le temps qu'emploie, dans le premier ou dans le second milieu suivant qu'il s'agit d'une réflexion ou d'une réfraction, un rayon de même nature que le rayon R' pour se propager du point O' au même point M. Si nous considérons le point O comme un point lumineux réel et le point O' comme un foyer réel, les rayons incidents étant de même nature que le rayon R, les rayons réfléchis ou réfractés de même nature que le rayon R', il y aura, d'après ce que nous venons de voir, une infinité de surfaces aplanétiques pour ces positions du point lumineux et du foyer. Parmi ces surfaces aplanétiques, il s'en trouvera nécessairement une qui passera par le point d'incidence I : cette surface aplanétique, que nous désignerons par Σ, sera tangente en I à la surface réfléchissante ou réfringente S, car au point I la surface Σ doit, comme la surface S, réfléchir ou réfracter vers le point O' un rayon provenant de O. Sur la surface aplanétique Σ la somme $T + T'$ est constante (40) : donc, puisque la surface S est tangente en I à la surface Σ, si, sur cette surface réfléchissante ou réfringente, on passe du point I à un point infiniment voisin, la variation de la somme $T + T'$ sera un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier; en d'autres termes, si, sur la surface S, on considère la somme $T + T'$ comme une fonction des coordonnées des points de cette surface, la différentielle de cette fonction sera nulle au point I.

Réciproquement, si, au point I, sur la surface S, la différentielle de la fonction $T + T'$ est nulle, cette fonction est constante sur la surface S

dans une étendue infiniment petite à partir du point I; par suite, la surface S est tangente en I à l'une des surfaces aplanétiques pour les positions O et O′ du point lumineux et du foyer : donc le point I est tel, qu'un rayon émané du point O, après s'être réfléchi ou réfracté en ce point, va passer par le point O′.

Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

Théorème XIX. — *Étant donnés deux points* O *et* O′ *et une surface réfléchissante ou réfringente* S, *la nature des rayons incidents étant assignée, ainsi que celle des rayons réfléchis ou réfractés, pour qu'une trajectoire partant du point* O *et aboutissant au point* O′ *en touchant la surface* S *soit réellement suivie par la lumière, il faut et il suffit qu'en passant de cette trajectoire à une trajectoire infiniment voisine quelconque, la variation du temps employé par la lumière pour se propager du point* O *au point* O′ *soit un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier.*

42. Le théorème précédent est dans la théorie des ondes l'analogue de ce qu'est le principe de la moindre action dans la théorie de l'émission.

Il peut s'exprimer encore en disant que : pour qu'une trajectoire partant du point O et aboutissant au point O′ soit réellement suivie par la lumière, il faut et il suffit qu'au point I où cette trajectoire touche la surface réfléchissante ou réfringente, la différentielle de la somme $T + T'$ soit nulle, cette somme étant considérée comme une fonction des coordonnées des points de la surface S.

Ce théorème permet, étant données les coordonnées des points O et O′, l'équation de la surface réfléchissante ou réfringente, la nature des rayons incidents et celle des rayons réfléchis ou réfractés, de calculer les coordonnées des points où un rayon parti du point O doit toucher la surface S pour aller, après réflexion ou réfraction, passer par le point O′.

Désignons en effet par (a, b, c) les coordonnées du point O, par (a', b', c') celles du point O′. Soit

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface réfléchissante ou réfringente S,

$$f_1(x, y, z) = 0$$

l'équation de la nappe, de même nature que le rayon incident, de la surface d'onde caractéristique du premier milieu décrite de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps,

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la nappe, de même nature que le rayon réfléchi ou réfracté, de la surface d'onde caractéristique du premier ou du second milieu, suivant qu'il s'agit d'une réflexion ou d'une réfraction, décrite de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps. Le temps T employé par la lumière pour se propager du point O à un point quelconque de la surface S, dont les coordonnées sont (ξ, η, ζ), est donné par l'équation

$$(2) \qquad f_1\left(\frac{\xi - a}{T}, \frac{\eta - b}{T}, \frac{\zeta - c}{T}\right) = 0.$$

De même le temps T' employé par la lumière pour se propager du point O' au même point de la surface S est donné par l'équation

$$(3) \qquad f_2\left(\frac{\xi - a'}{T'}, \frac{\eta - b'}{T'}, \frac{\zeta - c'}{T'}\right) = 0,$$

les deux fonctions f_1 et f_2 étant identiques quand il s'agit d'une réflexion homologue.

Si des équations (2) et (3) on tire les valeurs de T et de T', et qu'on les ajoute, on obtiendra une équation de la forme

$$T + T' = F(\xi, \eta, \zeta, a, b, c, a', b', c') = 0.$$

Entre cette équation et l'équation (1), on éliminera une des trois variables ξ, η, ζ, par exemple ζ, et on arrivera à une équation de la forme

$$T + T' = \mathfrak{F}(\xi, \eta, a, b, c, a', b', c').$$

Pour les points cherchés de la surface S, on doit avoir, d'après le théorème XIX,

$$d(T + T') = 0,$$

équation qui, puisqu'il y a deux variables indépendantes, se décompose en deux autres :

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = 0,$$

et

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = 0.$$

Ces deux dernières équations jointes à celle de la surface déterminent les coordonnées des points cherchés.

43. Il est facile de voir, en se fondant sur les considérations qui nous ont déjà servi à démontrer le théorème XIX, que le temps employé par la lumière pour se propager d'un point à un autre, en subissant une réflexion ou une réfraction, est en général un maximum ou un minimum.

En effet, au point d'incidence I la surface réfléchissante ou réfringente S est tangente à une surface aplanétique Σ sur laquelle la somme $T + T'$ est constante (41) : si, au point I, le contact entre les deux surfaces S et Σ est simplement du premier ordre, comme cela a lieu en général, ou si ce contact est d'ordre impair, la surface S, dans le voisinage du point I, est intérieure ou extérieure à la surface Σ, car dans ce cas les deux surfaces ne peuvent se couper. Si la surface S est extérieure autour du point I à la surface aplanétique Σ, comme, d'après ce que nous avons vu précédemment (40), pour les points extérieurs à Σ, la somme $T + T'$ a une valeur plus grande que sur la surface Σ, cette somme a, sur la surface S, une valeur minimum en I. Si, au contraire, la surface S tout autour du point I est extérieure à la surface aplanétique Σ, la somme $T + T'$ a au point I une valeur maximum sur la surface S. Lorsque les deux surfaces S et Σ ont au point I un contact d'ordre pair, ce qui n'a lieu que dans des cas exceptionnels, ces deux surfaces se coupent tout en étant tangentes, et alors la valeur de la somme $T + T'$ sur la surface S n'est ni maximum ni minimum en I, bien que la variation de la somme $T + T'$, quand on passe du point I à un point infiniment voisin sur la surface S, soit encore un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, et que, dans ce cas, cette variation soit même au moins du troisième ordre. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XX. — *Lorsque la lumière se propage d'un point O à un point O′ en subissant une réflexion ou une réfraction, le temps employé par la lumière pour parcourir sa trajectoire est toujours un minimum ou un maximum, à moins qu'au point d'incidence la surface réfléchissante ou réfringente n'ait avec celle des surfaces aplanétiques relatives aux positions O et O′ du point lumineux et du foyer qui passe en ce point un contact d'ordre pair.*

Le temps est un minimum lorsque, tout autour du point d'incidence, la surface réfléchissante ou réfringente est extérieure à la surface aplanétique, un maximum lorsque, tout autour du point d'incidence, la surface réfléchissante ou réfringente est intérieure à la surface aplanétique.

On croit souvent que le temps employé par la lumière pour se propager d'un point à un autre en se réfléchissant ou en se réfractant est toujours un minimum. Le théorème précédent montre qu'il n'en est rien, et indique le caractère auquel on peut reconnaître si ce temps est maximum ou minimum : de plus, il apprend à reconnaître les cas exceptionnels dans lesquels ce temps n'est ni minimum ni maximum. Il est à remarquer que ces cas exceptionnels ne peuvent jamais se présenter lorsque la surface réfléchissante ou réfringente est convexe, c'est-à-dire située tout entière du même côté d'un quelconque des plans qui lui sont tangents.

L'erreur que nous venons de signaler provient de ce qu'on ne considère ordinairement que des surfaces réfléchissantes ou réfringentes planes. Lorsque la surface réfléchissante ou réfringente est plane, elle se trouve tout autour du point d'incidence extérieure à la surface aplanétique à laquelle elle est tangente en ce point, et le temps est, en effet, toujours un minimum.

44. Nous n'avons considéré jusqu'ici que le cas d'une réflexion ou d'une réfraction unique; mais le théorème XIX a une portée plus étendue et permet de résoudre le problème général qui consiste à *déterminer la trajectoire que doit suivre un rayon lumineux pour se propager d'un point donné à un autre point donné, en subissant un nombre quelconque de réflexions et de réfractions sur des surfaces données et en traversant un nombre quelconque de milieux homogènes également don-*

nés, la nature du rayon dans chacune des parties de sa trajectoire étant d'ailleurs assignée.

Désignons par a, b, c les coordonnées du point de départ, par a', b', c' celles du point d'arrivée. Soient

$$(A) \qquad \begin{cases} \varphi_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0, \\ \varphi_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) = 0, \end{cases}$$

les équations des surfaces réfléchissantes ou réfringentes que nous supposerons au nombre de n, écrites dans l'ordre où la trajectoire rencontre ces surfaces. Appelons R_1 la partie de la trajectoire comprise entre le point de départ et la première de ces surfaces, R_2 celle comprise entre la première et la seconde,..., R_{n+1} celle comprise entre la dernière surface et le point d'arrivée.

Soient ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2;...; ξ_n, η_n, ζ_n les coordonnées des points où la trajectoire rencontre la première, la seconde,..., la $n^{ième}$ surface : ce sont ces coordonnées qu'il s'agit de déterminer. Soient encore

$$(B) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, y, z) = 0, \\ f_{n+1}(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

les équations des surfaces d'onde caractéristiques des milieux où se meuvent respectivement les rayons $R_1, R_2, \ldots, R_n, R_{n+1}$, surfaces décrites de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps, chacune de ces équations étant considérée comme ne représentant que la nappe de la surface d'onde caractéristique qui est de même nature que la portion correspondante de la trajectoire.

Appelons enfin T_1 le temps employé par la lumière pour se propager du point a, b, c au point ξ_1, η_1, ζ_1; T_2 le temps employé pour se propager du point ξ_1, η_1, ζ_1 au point ξ_2, η_2, ζ_2,...; T_{n+1} le temps employé pour se propager du point ξ_n, η_n, ζ_n au point a', b', c'.

D'après les équations (B), on aura

$$
(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{array}{l}
f_1\left(\dfrac{\xi_1 - a}{T_1},\ \dfrac{\eta_1 - b}{T_1},\ \dfrac{\zeta_1 - c}{T_1}\right) = 0,\\[2ex]
f_2\left(\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{T_2},\ \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{T_2},\ \dfrac{\zeta_2 - \zeta_1}{T_2}\right) = 0,\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\[1ex]
f_{n+1}\left(\dfrac{a' - \xi_n}{T_{n+1}},\ \dfrac{b' - \eta_n}{T_{n+1}},\ \dfrac{c' - \zeta_n}{T_{n+1}}\right) = 0.
\end{array}\right.
$$

Si, entre chacune des équations (C) et l'équation correspondante du groupe (A), on élimine les variables $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$, qu'on tire des équations résultantes les valeurs de $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$, et qu'enfin on ajoute ces valeurs deux à deux, on aura n équations de la forme

$$
(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{array}{l}
T_1 + T_2 = \mathfrak{F}_1(a, b, c, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2),\\
T_2 + T_3 = \mathfrak{F}_2(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
T_n + T_{n+1} = \mathfrak{F}_n(\xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \xi_n, \eta_n, a', b', c').
\end{array}\right.
$$

D'après le théorème XIX, on doit avoir, en considérant ξ_1 et η_1 comme seuls variables dans la première de ces équations; ξ_2 et η_2 comme seuls variables dans la seconde,..., ξ_n et η_n comme seuls variables dans la dernière,

$$
\begin{array}{c}
d(T_1 + T_2) = 0,\\
d(T_2 + T_3) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots,\\
d(T_n + T_{n+1}) = 0,
\end{array}
$$

et, par suite,

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{d\mathfrak{F}_1}{d\xi_1} = 0, & \dfrac{d\mathfrak{F}_1}{d\eta_1} = 0,\\[2ex]
\dfrac{d\mathfrak{F}_2}{d\xi_2} = 0, & \dfrac{d\mathfrak{F}_2}{d\eta_2} = 0,\\[2ex]
\dots\dots, & \dots\dots,\\[1ex]
\dfrac{d\mathfrak{F}_n}{d\xi_n} = 0, & \dfrac{d\mathfrak{F}_n}{d\eta_n} = 0.
\end{array}
$$

Ces équations, au nombre de $2n$, jointes aux n équations (A), déterminent les $3n$ coordonnées $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \dots; \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, et, par suite, la trajectoire cherchée.

En général, il y a une solution unique ou un nombre fini de solutions quand le problème est possible, ce qui n'a pas toujours lieu, comme il est facile de s'en assurer. Mais il peut arriver qu'il y ait un nombre infini de solutions correspondant à une courbe sur chacune des surfaces réfléchissantes ou réfringentes : le point d'arrivée est alors un foyer partiel pour un certain groupe de rayons formant une surface continue. Enfin, dans des cas très particuliers, il peut se faire que les valeurs des inconnues soient complétement indéterminées, ce qui indique que tous les rayons émanant du point de départ après réflexion et réfraction sur les surfaces données vont concourir au point d'arrivée, ou, en d'autres termes, que les surfaces réfléchissantes et réfringentes constituent un système aplanétique par rapport aux deux points donnés.

45. Remarquons encore que, lorsque la lumière peut se propager d'un point à un autre, en subissant un nombre quelconque de réflexions et de réfractions sur des surfaces données, *par plusieurs trajectoires en nombre fini, les temps employés à parcourir ces trajectoires ne sont pas nécessairement égaux*. Mais, lorsque la lumière peut suivre une infinité de trajectoires pour aller du point de départ au point d'arrivée, qui est alors un foyer total ou un foyer partiel, les temps que met la lumière à parcourir ces trajectoires sont nécessairement égaux (**34** et **35**). En d'autres termes, deux trajectoires partant du même point pour aboutir au même point ne sont nécessairement parcourues en des temps égaux que s'il existe une suite continue de trajectoires également parcourues par la lumière et dont ces deux trajectoires fassent partie.

ÉTUDE

SUR LES

MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ATMOSPHÈRE,

PAR M. SONREL,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

HISTORIQUE.

La Météréologie est très-ancienne, mais sa constitution comme science distincte est d'origine toute récente. Halley le premier expliqua les calmes équatoriaux. Le soleil échauffant la terre à l'équateur plus qu'en tout autre point, l'air doit être appelé des deux hémisphères vers la zone équatoriale, d'où il s'élève par sa légèreté dans les hautes régions de l'atmosphère. Cette origine des alizés est encore admise par la plupart des météorologistes actuels. Halley et quelque savants du XVIII[e] siècle firent faire de notables progrès aux diverses parties de la Physique qui touchaient la Météorologie.

La notion du transport général de l'air, et avec lui des accidents météorologiques, avait déjà pris assez de consistance pour que Lavoisier s'unît à Borda afin d'organiser à la surface de la France un réseau d'observateurs chargés de suivre la marche progressive des orages et des tempêtes sur notre pays.

La tourmente révolutionnaire détourna les esprits de ces études. Mais, pendant notre siècle, la navigation et le commerce maritime prenant chaque jour plus d'extension, on commença à se préoccuper de la durée des traversées et des moyens de la diminuer.

Un savant marin des États-Unis, devenu depuis directeur de l'Observatoire naval de Washington, Maury, pensa que l'étude des vents sur

les divers points de l'Océan permettrait de tracer sur les cartes marines les routes offrant le plus de chances favorables à une navigation rapide et d'abréger ainsi la durée des traversées. Maury était du reste convaincu qu'une harmonie parfaite règle tous les phénomènes naturels, et que des lois simples président aux effets les plus complexes.

« Le but des recherches météorologiques (*Sailing directions*, traduction de M. Ch. Ploix), dit-il, n'est pas seulement d'expliquer la production des phénomènes atmosphériques, mais de les prévoir et, par conséquent, de déterminer les lois générales des mouvements de l'atmosphère et des variations qui surviennent dans ses principaux caractères. Comme tous les phénomènes naturels, ceux-ci ne se produisent évidemment qu'en vertu de lois immuables, et toujours de la même manière dans les mêmes circonstances. Ces circonstances sont-elles assez nombreuses, assez variables dans leur intensité et leur combinaison pour qu'il soit impossible de découvrir, dans la marche des événements qui en dépendent, aucune régularité? Nous ne le pensons pas. »

Armé de cette conviction, Maury se mit à dépouiller tous les journaux de bord qu'il put recueillir pour la traversée d'Europe en Australie, et il démontra qu'il y avait tout intérêt à faire le voyage d'aller en doublant le cap de Bonne-Espérance, tandis qu'on devait revenir par le cap Horn. Ce résultat aussi nouveau qu'inattendu devait frapper les marins qui fréquentaient ces parages: quelques-uns essayèrent de suivre la nouvelle route ouverte, et la durée de leur traversée fut diminuée presque de moitié.

Les avantages immenses qui devaient résulter, pour le commerce, d'études s'annonçant par un premier résultat si important engagèrent les puissances maritimes de l'Europe à se réunir dans une conférence internationale provoquée par Maury, et où l'on devait décider de la meilleure direction à donner aux observations à la mer en même temps qu'on les rendrait autant que possible uniformes, de manière à les faire concourir à un même but. Cette conférence fut tenue à Bruxelles en 1852. Elle eut pour résultat immédiat la création (*) en Angleterre, en

(*) A la suite de la conférence de Bruxelles, un Rapport sur les travaux exécutés fut soumis au gouvernement anglais, qui vota une somme annuelle de 80000 francs, à laquelle l'Amirauté ajouta 25000 francs pour la formation d'un Bureau spécial annexé au *Board of trade;*

Hollande, en Prusse, en Russie et en Autriche, des observatoires météorologiques centraux destinés à centraliser les observations faites, soit sur la mer, soit sur les continents. Peu d'années après, Maury publiait ses instructions nautiques et une théorie de mouvements généraux de l'air et des mers sur tout le globe.

La cause de cette circulation est, suivant Maury, l'inégale distribution de la chaleur solaire aux différents points du globe. Tout échauffement d'un lieu y produit un courant ascendant de l'air qui afflue des parties voisines pour remplir le vide; tout refroidissement produit l'effet inverse. Le nombre des courants doit donc être et est illimité, puisque toute cause, si minime qu'elle soit, telle que la présence d'un nuage sur l'horizon, donne naissance à des courants locaux. Mais un fait général domine les autres : l'équateur est la zone la plus fortement échauffée par le soleil; il est aussi le siége d'un courant ascendant d'air. Parvenu à une grande hauteur dans l'atmosphère, cet air se déverse vers les pôles en deux nappes destinées à remplacer le gaz qui, à la surface de la terre, afflue de part et d'autre vers l'équateur. A une certaine distance le courant supérieur, s'abaissant graduellement vers la terre, finit par la rencontrer; la ligne suivant laquelle il y descend est dans le voisinage des tropiques; c'est la ligne des calmes du tropique, ou brises variables, ainsi expliquées par Maury. Au delà de ces régions, le courant supérieur abaissé à la surface continue sa route vers le pôle, d'où il revient en luttant souvent contre l'air parti de l'équateur, ou bien d'autres fois à l'état de courant supérieur (au moins sur les océans). Tel est le système général de la circulation atmosphé-

---

ce Bureau, tout à fait distinct, reçut le nom de *Vinds and Currents bureau*. La direction en fut confiée à l'amiral Fitz-Roy. A sa mort, en 1865, M. Babington lui succéda.

En 1854 fut fondé en Hollande l'Institut météorologique d'Utrecht, sous la direction de M. Buys-Ballot. Cet établissement s'est rendu célèbre par de nombreux travaux, qui y furent exécutés par MM. Janssen, Vangough et Andrau.

M. Dove fut chargé, en Prusse, de diriger un établissement du même genre.

L'Autriche confia à M. Jelineck la *Central-Anstalt für die Meteorologie,* fondé aussi pour étudier surtout le climat de l'Europe centrale.

Enfin M. Kupffer, mort il y a peu de temps, fut le premier directeur d'un Observatoire physique central fondé à Pétersbourg et ayant un grand nombre de succursales importantes dans la Russie d'Europe et la Sibérie. M. Kaemtz, si connu par ses travaux de Météorologie, et ancien directeur de l'Observatoire physique de Dorpat, lui a succédé.

rique exposé par Maury; le foyer de cette immense machine est l'équateur et l'agent actif est la chaleur solaire.

Il montre les mers soumises à la même influence de température et circulant à peu près parallèlement à l'air, autant du moins que le permet la forme des continents.

Maury fait voir aussi comment les alizés ne peuvent pas être dirigés du N. au S., mais s'inclinent vers l'O.; pourquoi les courants de retour, au lieu d'aller du S. au N., s'inclinent de plus en plus vers l'E. à mesure qu'ils s'approchent des pôles. Son explication, basée sur le mouvement de rotation du sphéroïde terrestre autour de son axe, apprend pourquoi, au N. des calmes équatoriaux, on observe les alizés de N.-E., et au S., ceux de S.-E.; puis les calmes des tropiques; enfin en dehors des tropiques des vents des régions O.

Les moussons de la mer des Indes, du voisinage de la côte d'Afrique et de celle du Pérou sont des conséquences de l'inégal échauffement de la mer et de la terre aux différentes époques de l'année.

M. Dove, directeur de l'Observatoire physique central de Prusse, poursuivant dans leurs conséquences les idées de Maury, chercha à en déduire une loi de rotation des vents. Pour lui, il n'y a en réalité que deux vents : les vents du N. et ceux du S.; ce sont les correspondants des courants polaires et équatoriaux; les autres vents ne sont que des modifications de ces deux directions principales. A mesure qu'une molécule d'air se dirigeant du pôle vers l'équateur s'avance vers le S., elle parait de plus en plus venir de l'E.; un vent d'E. peut donc être le résultat d'un déplacement de l'air du N. vers le S., dans le cas où l'origine du mouvement est très-éloignée; l'est-elle moins, le vent sera du N.-E. Un courant équatorial s'incline de plus en plus vers l'E. à mesure qu'il s'approche du pôle; la direction du vent auquel il donne naissance varie donc du S. au S.-O, et à l'O. lorsque l'origine du mouvement est de plus en plus éloignée. La combinaison de ces courants donne lieu aux autres vents. Or, de quelque manière qu'ils se succèdent, le vent tourne dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens que les aiguilles d'une montre. Cette loi reçut le nom de *loi de giration* (*Drehungs-Gesetz*). L'auteur montre comment il faut la modifier pour un point situé dans l'hémisphère austral, où la girouette doit tourner dans le sens inverse.

La loi de Dove, exigeant l'admission de la lutte constante entre les courants polaires et les courants équatoriaux à notre latitude pour expliquer la variabilité des vents, ne pouvait satisfaire complétement aux faits, et en tout cas elle n'indiquait pas la manière dont s'opérait la succession des courants.

La théorie de Maury a donné lieu à de graves objections, particulièrement en ce qui touche l'entre-croisement des alizés et des contre-alizés dans les zones équatoriales et tropicales. Ces objections sont très-fondées; mais M. Bourgois, d'une part, et, de l'autre, M. Marié-Davy, ont montré que la théorie de Maury peut être dégagée des erreurs qu'elle renferme et rester vraie dans ses bases essentielles. La théorie de Maury sur le transport général de l'atmosphère dans la zone tempérée et dans la zone arctique était déjà vérifiée par la progression connue de certains phénomènes, tels que les cyclones et les coups de vent.

M. Quételet, directeur de l'Observatoire de Bruxelles, entreprit, par une méthode nouvelle, l'étude de ce mouvement pour l'Europe et le continent asiatique. Il remarqua que la pression barométrique ne passait pas par son maximum en même temps en tous les points d'une vaste région, mais que tous ceux où le maximum se produisait au même instant se trouvaient sur des lignes continues se déplaçant régulièrement dans une direction déterminée. La même chose ayant lieu pour le minimum barométrique, on peut tracer à la surface de la terre les lignes de maxima barométriques simultanées et de même les lignes de minima. L'espace compris entre deux lignes de maxima successives est ce que l'auteur appelle une onde atmosphérique. Dans un mémoire publié en 1857, il donne les résultats de son étude et l'appuie sur plusieurs cartes.

« 1° L'atmosphère est généralement traversée par plusieurs systèmes d'ondes différents. Ces ondes interfèrent et produisent pour chaque lieu de la terre un état spécial de pression.

» 2° Au milieu de tous les mouvements particuliers, il se prononce un système d'ondes qui semble rester à peu près constant pour chaque climat.

» 3° Les ondes atmosphériques, tant en Europe qu'en Asie, se propagent du N. au S., sans avoir toutefois la même vitesse; elles mar-

chent plus rapidement dans le système asiatique et dans le système de l'Europe centrale qu'en Russie ou dans les montagnes de l'Oural.

» 4° Les ondes atmosphériques semblent se propager avec moins d'obstacles à la surface des mers qu'à l'intérieur des terres. En général les aspérités du globe, et particulièrement les chaînes de montagnes, diminuent leur vitesse et modifient aussi leur intensité.

» 5° L'inégalité de vitesse sur le continent, d'une part, et dans le voisinage de la mer, d'autre part, explique les inflexions qu'éprouve dans toute son étendue la ligne qui figure la marche générale de l'onde dans notre hémisphère. Cette ligne se replie de manière à être poussée en avant dans le sens de la plus grande vitesse ; ainsi, l'onde pénètre presque en même temps sur le continent européen par les différentes côtes de la mer du Nord, de l'Océan et de la Méditerranée ; d'une autre part elle vient aboutir presque en même temps le long de la chaîne de l'Oural et des Alpes Tyroliennes.

» 6° La vitesse avec laquelle les ondes barométriques se propagent est très-variable ; elle peut être estimée moyennement de 6 à 10 lieues de France par heure ; elle est un peu plus grande dans l'Europe centrale et moindre en Russie. Au reste, cette vitesse varie d'un onde à l'autre ; elle varie même pour les différentes parties d'une même onde. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, elle est plus grande vers les côtes et dans tous les endroits où la propagation du mouvement paraît plus libre. Au contraire, dans le voisinage des montagnes et des plateaux, cette vitesse diminue notablement ; dans l'Oural, elle se réduit parfois à moins de 2 lieues par heure.

» 7° Les directions des vents n'ont pas de rapports apparents avec les directions des ondes barométriques. Ce fait important semble favorable à l'hypothèse de courants compensateurs marchant dans le bas de l'atmosphère et dans des directions opposées à celles des courants qui vont des pôles vers l'équateur. Remarquons, du reste, que l'air peut aussi se condenser par des pressions latérales sans qu'il y ait des affluents d'air nouveau, et par suite des vents sensibles dans la direction de ces pressions. Au contraire, les vents dominants peuvent fort bien subsister sans altération pendant que les masses d'air qu'ils déplacent changent sensiblement de densité !

» Il doit en être de certaines ondes barométriques comme des ondes

sonores, qui se transmettent dans toutes les directions malgré l'obstacle des vents, lesquels peuvent, à la vérité, en modifier l'intensité et la vitesse. »

L'étude faite à l'Observatoire, en 1854, sur la grande tempête, dite de Balaklava, a été entreprise en partant des mêmes idées.

M. Quételet avait ainsi trouvé les courants de retour de l'air des pôles vers l'équateur; les irrégularités qu'il remarque tiennent à ce qu'il néglige complétement une condition très-importante, la densité plus ou moins grande de l'air en tous les points d'une même ligne maxima ou minima, et à ce qu'il ne voit pas les relations possibles entre la direction du vent et celle du courant général. Nous verrons plus loin comment on peut aujourd'hui interpréter ses résultats avec la plus grande simplicité.

La Météorologie étant ainsi lancée dans sa véritable voie par les travaux des modernes, on chercha à l'appliquer à la prévision des tempêtes. De semblables essais avaient été faits depuis longtemps; on avait même fondé sur le retour plus ou moins régulier des phénomènes observés en un lieu des prédictions du temps faites de longues années d'avance. Aucun principe certain n'ayant présidé à ces travaux, destinés le plus souvent à spéculer sur la curiosité publique, aucun résultat sérieux n'en était sorti.

A la fin du siècle dernier, le transport des météores, tels que les orages, les ouragans, etc., d'un lieu dans un autre, avait été reconnu ou du moins deviné suffisamment pour qu'on crût pouvoir se servir du télégraphe à signaux, nouvellement imaginé, pour annoncer l'arrivée des mauvais temps. Lavoisier avait déjà établi sur la France un grand nombre d'observatoires météorologiques munis des instruments nécessaires à l'observation des accidents atmosphériques. Malheureusement la mort arrêta ses travaux.

Cette idée, reprise par Piddington et par les Américains, fut remise à l'ordre du jour en France par M. le directeur de l'Observatoire; mais c'est en Angleterre qu'elle entra pour la première fois dans la pratique. En 1861 l'amiral Fitz-Roy entreprit de signaler les coups de vent un jour ou deux à l'avance. Son idée mère était que le courant équatorial, dans lequel nous sommes pendant la plus grande partie de l'année, éprouve des résistances variables de la part des courants polaires luttant

contre lui. La rencontre des deux courants de sens inverse engendre des tourbillons ou remous plus ou moins rapides suivant la vitesse et l'intensité des courants.

L'air arrivant de l'océan Atlantique sur les Iles-Britanniques ou une terre quelconque entrecoupée de chaînes de montagnes, des remous prennent naissance sous l'influence de ces obstacles, et il en résulte des tourbillons locaux, dont M. Fitz-Roy figure l'étendue et l'origine sur l'une des cartes de son *Weather-Book*.

Plusieurs causes amènent des coups de vent ; ce sont des refroidissements ou des échauffements subits en certains points.

Enfin il était connu depuis plusieurs années déjà que les tempêtes des tropiques, tornados, trombes, cyclones, harmattan, etc., ont un caractère commun de tourbillons parcourant souvent de grands espaces avant de perdre leur violence. Reid, Redfield et Piddington avaient déjà suivi plusieurs de ces météores à la surface de l'océan Atlantique et de l'océan Pacifique ; ils avaient tracé sur des cartes les trajectoires des centres des tourbillons et la zone de plus en plus large sur laquelle ils exerçaient leur action. On savait que, sur l'Atlantique, on les voit d'abord près de la zone des calmes, dont ils s'éloignent lentement en se dirigeant vers l'O. pour suivre une trajectoire parabolique ayant son sommet près du golfe du Mexique. Quand ils parviennent dans la région des courants de retour, ils sont entraînés vers le N.-E., leur trajectoire s'incline de plus en plus vers l'E., et on les suit plus ou moins loin suivant l'intensité du mouvement initial et les circonstances atmosphériques plus ou moins favorables à l'entretien du mouvement rotatoire. Plusieurs de ces météores ont pu être suivis à travers l'Europe jusqu'à la Russie et la mer Caspienne.

La théorie des tourbillons a occupé un grand nombre de météorologistes ; presque tous ont apporté leur pierre à cet important travail. Redfield avait déjà expliqué pourquoi le baromètre atteint sa hauteur minima en un point central ; il attribuait cette dépression à la force centrifuge, qui, dans les mouvements rotatoires, se développe d'autant plus que le mouvement est plus rapide. Le lieutenant-colonel W. Reid, dans un ouvrage intitulé : *The progress of the law of the storms, etc.* (1 vol. in-8 publié à Londres en 1849), appuie par de nombreux exemples la théorie de Redfield.

M. Keller, dans un ouvrage sur la théorie des tempêtes tournantes, explique leur formation de la manière suivante :

« Les ouragans prennent naissance à la rencontre des moussons opposées dirigées vers le maximum thermal. Les vents variables qu'on observe au maximum thermal résultent du mouvement giratoire inverse imprimé par les courants N. et S. aspirés par le mouvement ascendant de l'air. Le lieu d'ascension de l'air se déplace avec la déclinaison du soleil. Quand le déplacement s'opère sans entraves, le mouvement giratoire imprimé à l'air de la région des calmes est représenté par des vents variables de faible intensité; mais si, par suite de l'inégale distribution des terres et des mers, ou par d'autres causes, le point d'appel des moussons opposées persiste dans une certaine position au delà du temps assigné par le déplacement du soleil, plus cette persistance sera longue, plus le changement de position sera brusque et considérable quand les forces régulières l'emporteront sur les forces perturbatrices; et, la détente des forces régulières n'ayant pu s'opérer progressivement par le mouvement giratoire de faible intensité des vents variables, cette détente s'opérera brusquement, la masse d'air retardée se précipitera avec impétuosité vers son nouveau point d'appel, et le couple résultant de la déviation des moussons opposées fera tourbillonner avec furie la masse d'air intermédiaire.

» Au N. de l'équateur, chaque tranche atmosphérique sera donc mise en mouvement par un couple de deux forces, dont l'une, au S., est dirigée vers le N.-E.; l'autre, au N., est dirigée vers le S.-O. Il en résulte un mouvement de rotation dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre ; ce sera l'inverse dans l'hémisphère S. »

Le même auteur attribue le mouvement de translation à ce que le tourbillon est entraîné par les courants généraux. La résultante de la poussée exercée sur lui par les alizés de S.-E. et par ceux de N.-E. l'entraînerait vers l'O. jusqu'à la limite septentrionale des alizés de N.-E.; au delà de cette région les courants de S.-O. le poussent vers nos parages.

Le circuit complet du vent autour d'un centre qui se déplace est facile à constater dans les régions équatoriales quand les observations sont assez nombreuses. Le mouvement de translation du météore est faible comparativement à son mouvement de rotation. Dans nos climats

il n'en est pas toujours ainsi. M. Andrau, de la marine hollandaise, a reconnu, en effet, en suivant les tourbillons de l'Atlantique N. depuis leur formation, que, lorsqu'ils dépassent les régions tropicales, leur caractère rotatoire devient de plus en plus difficile à reconnaître. On voit plus longtemps se conserver la partie qui regarde l'équateur, et elle se restreint successivement aux portions les plus méridionales, jusqu'à la disparition complète de l'ouragan. Il a donné dans un mémoire (*De Wet der Stormen, etc.*), publié en 1862, une explication ingénieuse de ce fait curieux. Le tourbillon peut être considéré comme un disque animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe à peu près vertical à son origine. La rapidité du mouvement de rotation maintient l'axe parallèle à lui-même, en sorte qu'il s'incline par rapport à la surface de la terre à mesure qu'il s'éloigne de la zone torride. Si donc le cyclone s'est formé à l'équateur, son axe sera, dans tout son parcours, à peu près perpendiculaire à l'axe de la terre. Il en résulte que la partie septentrionale du disque s'élève au-dessus de la surface de la terre, où, par suite, son action est insensible ; la partie méridionale seule rencontre la terre et y donne de grands vents. M. Andrau conclut de là que les violentes tempêtes de nos climats proviennent de cyclones dont une partie n'exerce son action que dans les hautes régions de l'atmosphère. Il explique à l'aide de la même théorie la rareté des vents forts d'E. et la rotation du vent de S.-O. à N.-O. pendant la plupart de nos tempêtes.

L'extension considérable que continuait à prendre l'étude des océans, grâce surtout aux travaux des Américains et des Hollandais, et l'étude des continents par le savant prussien Dove, montrèrent qu'en dehors des zones tropicales et équatoriales on trouvait des parages fréquentés de préférence par les tempêtes, et que généralement elles y étaient accompagnées de variations considérables du baromètre. Le cap Horn, le cap de Bonne-Espérance ou cap des Tempêtes, les parages occidentaux de l'océan Atlantique N. sont sous ce point de vue connus depuis longtemps des marins. M. Andrau a discuté tous les documents qu'il a pu recueillir relativement aux tempêtes du cap de Bonne-Espérance, et il a dressé des cartes permettant de suivre ces météores. Il a étudié leurs caractères et leur mouvement de translation de l'O. vers l'E. Il les ramène à deux types principaux. Tantôt ils se présenteraient en

forme ovale allongée avec une pointe vers l'E., tantôt ils seraient à peu près circulaires, mais présentant toujours une pointe vers l'E., c'est-à-dire du côté vers lequel s'opère la translation. La zone tempétueuse est parfaitement limitée ; c'est à son centre que le vent est le plus violent, et il diminue de force à mesure qu'on s'éloigne de ce point.

Dans plusieurs tempêtes, la diminution était assez rapide pour que, leur centre passant près de la côte, cette dernière ne ressentît que des brises peu intenses. Ce ne sont pas, dit l'auteur, des ouragans rotatoires comme ceux de l'océan Indien ou des Antilles ; le vent s'éloignant, dans la partie postérieure du météore, d'une ligne médiane, converge de nouveau vers cette ligne à la partie antérieure. La ligne médiane, qui est aussi la trajectoire du centre de la tempête, est appelée par les Hollandais l'axe de la tempête.

La trajectoire du centre occupe des positions différentes ; son éloignement de la côte d'Afrique est probablement en relation avec les saisons, mais elle est toujours contenue entre certaines limites ; les caractères de la tempête restent les mêmes et sa vitesse de translation reste à peu près constante.

M. Andrau voit la cause de ces phénomènes dans le conflit de deux courants d'air superposés ; celui de N.-O., qui vient de l'équateur dans les régions supérieures de l'atmosphère, rencontre en s'abaissant sur la terre l'alizé de S.-E. Il résulterait de leur lutte un tourbillon à axe presque horizontal, ce qui établirait une différence entre les tempêtes du cap et les cyclones.

Un marin français, M. Bridet, qui a soigneusement étudié la météorologie de ces régions (*), voit dans les ouragans du cap la continuation des tempêtes de l'océan Indien entraînées par les courants atmosphériques généraux jusqu'à cette latitude.

L'examen rapide des travaux exécutés sur les tempêtes montre donc qu'on en reconnaissait de deux sortes : 1° celles qu'on désigne plus vulgairement sous le nom de *coups de vent* ou de *tempêtes :* leur caractère est d'être accompagnées d'un mouvement de l'air dans une direction à peu près constante ; 2° celles qu'on désigne sous le nom de

(*) *Tempêtes de l'océan Indien.*

tourbillons, et dans lesquelles l'air tourne autour d'un axe vertical ou d'un axe incliné même jusqu'à être presque parallèle à la surface terrestre.

Les tempêtes tournantes s'observent surtout dans l'océan Atlantique N., l'océan Indien et les mers de la Chine; quelques-uns de ces météores sont entrainés jusque dans les régions tempérées; leur vitesse de translation augmente alors en même temps que leur vitesse de rotation diminue.

Mais, en général, les coups de vent des zones extérieures aux tropiques sont dus à d'autres causes qu'à une rotation. Les tempêtes, beaucoup plus fréquentes que dans les zones tropicales, paraissent prendre naissance dans les régions où les courants océaniques de températures très-différentes se rencontrent, comme cela arrive au cap Horn, au cap de Bonne-Espérance et le long du Gulf-Stream, courant chaud de l'Atlantique N.

Rien de général n'existe donc relativement à la théorie des tempêtes. Dans un livre publié en 1863 par M. Charles Ploix, ingénieur-hydrographe de la marine (*), et où l'auteur donne le résumé des travaux les plus récents relativement à cette question, nous trouvons : « Dans les zones tempérées, désignées quelquefois sous le nom de *zones des vents variables*, les tempêtes sont généralement de simples coups de vent, c'est-à-dire que la brise souffle à peu près de la même direction.

» Dans les zones tropicales, les coups de vent soufflent presque toujours de la partie de l'O.; cependant, dans l'Atlantique N., où la circulation atmosphérique est moins régulière à cause des grandes surfaces continentales, on observe un certain nombre de coups de vent d'E.

» Ces coups de vent des régions tempérées sont le résultat de la lutte des courants polaires et des courants équatoriaux. Un baromètre très-haut ou très-bas, relativement à sa moyenne hauteur dans le lieu où l'on se trouve, est généralement l'indice précurseur d'une perturbation

---

(*) *Vents et courants. Routes générales.* Extrait des *Sailing directions* de Maury et des travaux les plus récents, par M. Charles Ploix, ingénieur-hydrographe de la marine, publié sous le ministère de S. Exc. le comte de Chasseloup-Laubat, Sénateur, Ministre secrétaire d'État de la Marine et des Colonies. (*Voir* p. 88 et 89.)

atmosphérique. La baisse du baromètre indique que l'air a été entraîné vers les régions supérieures ou de tout autre côté, de manière qu'il s'est produit un vide relatif. Lorsque les masses d'air des zones voisines affluent pour remplir ce vide, elles afflueront avec d'autant plus de force que la différence de pression sera plus grande. La hausse du baromètre peut indiquer que des courants d'air opposés viennent se heurter l'un contre l'autre, accumulant au même point des masses d'air considérables ; il arrivera un moment où l'un des deux courants se détournera pour laisser à l'autre le champ libre; celui-ci sévira avec d'autant plus de violence qu'il aura été retardé plus longtemps.

» Dans les régions dont nous parlons, on peut dire que tous les coups de vent, d'une manière générale, sont précédés ou accompagnés d'indications barométriques extraordinaires. Et cela est vrai de l'hémisphère S comme de l'hémisphère N. Cependant un certain nombre de marins affirment que dans quelques parages, au cap Horn, par exemple, le baromètre ne peut servir à prévoir le temps, et qu'il ne faut compter en aucune façon sur ses indications. D'autres, au contraire, croient avoir remarqué que là, comme dans les autres zones, les mouvements barométriques annoncent les mêmes phénomènes. »

C'est alors que fut créé le service météorologique international dont le centre est à l'Observatoire de Paris. La construction des cartes synoptiques de l'état atmosphérique de l'Europe, pour tous les jours de l'année, à 8 heures du matin, permit à M. Marié-Davy, chargé par M. le Directeur de l'Observatoire impérial d'organiser la partie scientifique de ce service, de découvrir une loi générale de toutes les bourrasques. Il vit que, dans les zones tempérées comme près de l'équateur, elles ont toujours le même caractère de tempêtes rotatoires ; que toujours une dépression barométrique ayant un minimum central coexiste avec le météore ; que la translation des centres se fait sur notre continent avec une vitesse uniforme et suivant des routes à peu près constantes, variables seulement avec les saisons. Le même savant a reconnu que presque toujours les tempêtes ou bourrasques arrivent toutes formées sur nos côtes, et qu'elles les abordent, suivant les cas, à des latitudes différentes.

Des relations simples entre le passage des bourrasques dans notre voisinage, la hauteur du baromètre, la direction et la force du vent, l'état

du ciel et celui de la mer sur les côtes, ressortirent de ces études. Il devenait alors très-intéressant d'étendre à la surface de tout l'Atlantique N. le réseau météorologique établi sur l'Europe. Un service spécial fut créé à l'Observatoire de Paris pour étudier les bourrasques à la surface de l'Océan. Le concours empressé de la marine française et de plusieurs marines étrangères permettra de mener à bonne fin cette vaste entreprise. Les cartes synoptiques journalières pour une partie de l'année 1864 ont déjà pu être prolongées à l'O. jusqu'au Mexique, au N. jusqu'au cap Nord-Kyn, et au S. jusqu'à l'équateur.

Leur étude vérifia les vues de M. Marié-Davy; les bourrasques européennes se rattachent toutes à des mouvements tournants, et l'on peut les suivre toutes comme à la piste en examinant la série des cartes dressées sous sa direction à l'Observatoire impérial. Suivant les époques de l'année, elles se forment sur le bord septentrional du Gulf-Stream en des points variables de l'Océan, et elles sont entraînées vers le N., puis vers l'E. Toutes cependant ne prennent pas naissance dans ces parages. A certaines époques, et particulièrement dans la saison chaude, on en voit naître un peu au N. de la ligne des calmes du tropique N. et dans les parages des Açores près de la région où l'alizé du N.-E. remonte le plus haut vers le N. et atteint sa plus grande intensité.

Il ne se passe pas de jour sans qu'un mouvement tournant et souvent même plusieurs voyagent sur l'immense région soumise à ce nouveau genre d'études; généralement ils traversent l'Europe simultanément à diverses latitudes; les premiers, par exemple, visitant les côtes septentrionales de la Norwége et la Laponie, se dirigent vers l'Oural, pendant que les seconds passeront sur la France, l'Autriche et la vallée du Danube, ou, côtoyant le Portugal et le S. de l'Espagne, exercent leur action sur les côtes d'Afrique.

Entre ces trajectoires des mouvements tournants, remarquables par le mauvais temps, la force et la variation du vent, les fortes oscillations du baromètre, on voit des zones où l'air reste calme, ou agité seulement par de faibles brises, et où le beau temps règne presque sans interruption.

Les trajectoires des bourrasques s'abaissent-elles un peu vers le S. ou remontent-elles vers le N., les régions exposées précédemment aux

mauvais temps rentrent dans le calme, et les autres prennent leur place. Ce fait simple, mais d'une importance capitale à cause de ses conséquences, a permis d'assigner une cause générale aux variations brusques de nos climats, bien que les courants généraux y aient toujours la direction indiquée par Maury ; elles peuvent être en effet le résultat de variations faibles en latitude des trajectoires des mouvements tournants.

Ces derniers, flotteurs entraînés par les mouvements généraux, nous éclairent sur leur vraie direction. Ils ont montré à M. Marié-Davy qu'une circulation double existe à la surface de la terre; une première, verticale dans la zone chaude, consiste dans l'appel vers l'équateur de l'air des régions voisines, et dans son déversement vers les pôles par les régions supérieures de l'atmosphère ; au delà d'une certaine latitude, ces courants supérieurs rencontrent la surface de la terre ; ils circulent horizontalement à l'état de courants équatoriaux dans certaines régions, et, inclinant de plus en plus vers l'E., forment en d'autres pays des courants de retour ou polaires. Les déplacements de l'équateur thermique et les différences d'échauffement des continents et des mers aux diverses époques de l'année expliquent les variations observées dans cette double circulation. Enfin, M. Marié-Davy assigne aux bourrasques une cause unique, une condensation brusque produite dans un courant humide et chaud par sa rencontre avec un courant plus froid ou son passage sur des régions refroidies. Le mouvement de rotation de la terre donne naissance, comme on le conçoit aisément, à une différence de grandeur dans les vitesses de deux masses d'air venant du N. et du S. pour remplir le vide, et un mouvement tournant analogue aux tourbillons de nos rivières est la conséquence de ces deux faits. Il est ensuite entraîné par le courant général, et la combinaison des deux vitesses de translation et de rotation explique la présence des vents forts d'un seul côté du tourbillon, pendant qu'un calme relatif règne vers le centre et que de l'autre côté le vent est faible, nul, ou même de sens inverse à la rotation, si ce dernier mouvement est assez faible par rapport à la translation.

Or, à mesure que le tourbillon s'avance, il tend à entraîner l'air environnant, et, par suite, son cercle d'action augmente à mesure qu'il s'éloigne de son origine ; la conséquence en est que la vitesse angulaire

de rotation diminue et que le tourbillon ne montre plus qu'une de ses moitiés.

Mais qu'on tienne compte de la vitesse de translation, et qu'on construise en chaque point le parallélogramme des vitesses sur la vitesse de rotation en ce point et la vitesse de translation prise en sens inverse, on retrouve le tourbillon complet, comme il s'en présente quelquefois et comme cela arrive presque toujours près de l'équateur, où la vitesse de rotation est grande et celle de translation faible.

Je ne m'étendrai pas plus longuement sur les théories de M. Marié-Davy. Il les a exposées dans un livre qui vient de paraître (*). Je me contenterai d'énoncer sa dernière loi, relative à la relation entre les orages et l'état général de l'atmosphère. Il a fait voir que les orages sont dans une dépendance immédiate des mouvements tournants ; qu'ils se produisent toujours dans le bord dangereux de ces météores lorsqu'ils se présentent dans des circonstances convenables, dont la principale est relative à l'état hygrométrique de l'air. Les vues de M. Marié-Davy, appuyées sur de nombreux exemples, avaient une telle importance relativement à l'agriculture, qu'un réseau d'observateurs fut improvisé sous l'impulsion de S. Exc. le Ministre de l'Instruction publique, M. Duruy, pour observer à la surface de toute la France les orages suivant un mode spécial indiqué dans des instructions faites par M. Marié-Davy, et qu'un service spécial fut fondé, en 1865, à l'Observatoire impérial, pour centraliser ces documents et construire les cartes synoptiques des orages de la France. La relation indiquée précédemment ressortit depuis lors avec évidence de cet atlas des orages, aujourd'hui publié. M. Fron, chargé de sa construction, a reconnu en même temps plusieurs faits nouveaux et importants qu'il a développés dans un travail récent.

(*) *Les Mouvements de l'atmosphère et des mers, considérés au point de vue de la prévision du temps*, par H. Marié-Davy, docteur en médecine, docteur ès sciences, agrégé de l'Université, astronome, chef de la division de météorologie à l'Observatoire impérial de Paris. Grand in-8; 1866.

CHAPITRE I.

LA RÉGION MÉDITERRANÉENNE. — TRAVAUX FAITS SUR CETTE RÉGION. — SA DESCRIPTION GÉNÉRALE.

La région méditerranéenne étudiée dans ce travail a été depuis les Grecs le centre de la civilisation du monde. Elle est cependant loin d'être aussi bien connue que la plupart des autres mers. Un grand nombre de mémoires ou même de grands ouvrages ont été écrits sur ce sujet. Dans tous, les auteurs s'occupent de points particuliers de cette région pour un objet presque toujours spécial ; ils ne se sont surtout pas attachés à trouver les lois générales des faits qu'ils observaient et à en définir les causes.

Les écrits d'Aristote nous ont transmis les connaissances des Grecs sur les climats et surtout sur le leur. Ils avaient reconnu dans les vents qui règnent sur l'Archipel une certaine régularité. Ainsi, après le solstice d'été, le vent souffle pendant quelque temps de N., souvent avec beaucoup de force et de persistance. Puis le S. domine pendant longtemps, et ne cède que par intervalles la place au N. en hiver. Les vents de N. de l'été s'appelaient les *étésiens*, les autres de S., les *ornithies*.

Les rares documents qu'on trouve épars dans les œuvres des écrivains postérieurs n'ont généralement pas un caractère scientifique, et sont mélangés de beaucoup d'erreurs. Il faut venir jusqu'à ce siècle, époque du réveil de la Météorologie, pour trouver des observations suivies et des mémoires sérieux sur cette partie du monde.

Les côtes de la Provence et du Languedoc sont, avec l'Italie, les régions les mieux connues depuis les travaux de Toaldo, de Gasparin et de tant d'autres observateurs qui ont suivi leur exemple. Réunis et discutés avec une grande habileté, les documents qui en résultent ont donné naissance au *Tableau du climat de l'Italie* du Danois Schouw (*).

MM. Bérard, de Tessan, Lieusson, le premier officier de la marine française, les deux autres ingénieurs hydrographes de la marine, ont

(*) Publié à Copenhague, chez Gyldendal, en 1839.

mis à profit des missions dont les avait chargés le gouvernement pour ajouter à des reconnaissances des côtes de l'Algérie l'étude du climat de notre colonie.

Il suffira de rappeler les grands travaux de M. Aimé, membre de la Commission scientifique de l'Algérie, les mémoires pleins d'intérêt de MM. Renou, Paul Marès, Fournel, Fournet, etc., qui tous ont étudié cette contrée et l'ont parcourue dans plusieurs directions.

L'amiral Smyth, de la marine anglaise, a étudié complétement la géographie physique de la Méditerranée et les ressources qu'un voyageur doit attendre dans chacune de ses parties; plusieurs chapitres sont consacrés à la Météorologie.

Bœttger a publié un travail du même genre enrichi de tous les documents qu'il a rencontrés dans les œuvres de ses prédécesseurs.

M. le docteur Schnepp a fait paraître dernièrement un ouvrage fort curieux : *Climats de l'Afrique septentrionale, de l'Italie et du midi de la France* (1).

Enfin nous ne pouvons passer sous silence les noms de MM. de Pietra-Santa, Lubanski, Raulin, Viquesnel, le général Daumas, Francesco de Bosis, Giacintho Namias, Antonio Berti, Secchi, de la Marmora, Vaillant, Julius Barasch, Aucour, Robin, etc., à qui nous devons des séries d'observations ou des écrits sur des points spéciaux du même sujet.

Nous avons désiré seulement dans ce mémoire relier le système des vents sur la Méditerranée à la circulation générale, et montrer comment les mouvements de l'atmosphère, en apparence si complexes à la surface de cette mer intérieure, sont soumis à des règles fixes et peuvent se déduire des conditions climatériques des contrées voisines.

La Méditerranée ne se termine point pour le météorologiste aux rivages de la mer; nous désignons sous ce nom le bassin dont les bords sont les Alpes et les Karpathes au N.; les Pyrénées, les sierras espagnoles et les montagnes du Maroc à l'O.; l'Atlas et les monts de la Tunisie au S.; le Liban et les plateaux de l'Anatolie à l'E. La mer Noire, bien que séparée par les Balkans et l'Asie Mineure de la Méditerranée proprement dite, se rattache par les phénomènes qu'elle pré-

(1) Paris, chez Lainé, rue des Saints-Pères, 19, et chez Leclerc, rue de l'École-de-Médecine, 14.

sente au bassin que nous venons de circonscrire; sa partie septentrionale, resserrée entre le Caucase et les Karpathes, limitera pour nous au N.-E. le bassin méditerranéen.

Les bords du bassin, échancrés profondément en plusieurs points, y laissent un plus libre passage à l'air ; c'est ce qu'on observe entre les Pyrénées et les Alpes, entre les Karpathes et le Caucase, les plateaux espagnols et les montagnes du Maroc, les montagnes tunisiennes et le Liban. Cette particularité nous servira à expliquer plusieurs faits remarqués depuis longtemps.

L'Europe, qui borne la Méditerranée au N., la zone des déserts de l'Asie et de l'Afrique qui la termine à l'E. et au S., le voisinage de l'océan Atlantique à l'O., achèvent de donner au climat dont nous voulons analyser les causes son cachet spécial.

On sait que les eaux de l'océan Atlantique sont animées vers le N. et l'E., à partir du golfe du Mexique, d'un mouvement qui se continue à une faible distance des côtes des États-Unis pour aborder l'Europe, où le courant célèbre sous le nom de Gulf-Stream répand ses eaux dans diverses directions. L'une de ses branches descend vers le S. en longeant les côtes du Portugal ; une seconde, sous le nom de courant de Rennel, fait le tour du golfe de Gascogne, pour se mêler à une troisième qui pénètre entre l'Irlande et l'Angleterre ; une dernière passant entre l'Islande, les Iles-Britanniques et la Norwége, parvient dans les régions glaciales. Les côtes occidentales de l'Europe sont donc toutes soumises à l'action de cet immense courant. Sa chaleur, qu'il n'a pas encore perdue, tempère les hivers de l'Europe occidentale.

Un courant atmosphérique l'accompagne et pénètre sur le continent, où il entraine de grandes quantités de vapeur d'eau. Leur présence modère en été l'effet du soleil et diminue en hiver le rayonnement considérable qui rend cette saison si rigoureuse en Sibérie et sur les hauts plateaux de l'Asie.

Le courant aérien rencontre des montagnes généralement élevées qui, sans lui interdire complétement l'entrée du bassin méditerranéen, la rendent beaucoup moins facile et ne la permettent parfois que par les brèches dont nous avons parlé.

Le courant occidental règne presque sans partage sur le N.-O. de l'Europe; mais souvent, en été surtout, il cède la place à des vents

de N,, entre les Açores et l'Espagne. Ces vents, dont la direction incline plus ou moins à l'E., ne sont que les alizés prolongés vers le N. Ils envahissent par intervalles le continent, et on les a vus souffler pendant d'assez longues périodes de la Baltique à l'Océan.

Les déserts de l'E. et du S. exercent une influence remarquable sur le déplacement de ces fleuves aériens, surtout dans le voisinage de la Méditerranée. Leur échauffement extrême en été produit un appel d'air considérable des régions voisines, et les courants d'O., après avoir pénétré sur l'Europe, s'infléchissent vers le S.-E. où les attirent les déserts de Gobi, de la Perse et de l'Arabie. Le Sahara attire de même vers lui, à travers le grand canal laissé entre l'Atlas et le Liban, l'air des contrées plus septentrionales, tandis que l'Atlas neutralise beaucoup ce grand mouvement.

L'alizé, dévié à sa partie septentrionale vers l'Afrique, y prend une direction N., puis N.-N.-O., et devient cette mousson de N.-O. si redoutée à cause des orages et des coups de vent qui l'accompagnent.

Entre ces influences si diverses, la Méditerranée ne présente au premier abord rien de bien saillant. La circulation semble des plus accidentées à sa surface, et les faits généraux conclus jusqu'alors de son examen sont peu nombreux.

Nous avons déjà cité les *vents étésiens* et les *ornithies*, entre Constantinople et l'Egypte. Le *siroco*, vent du S., remarquable surtout par l'action physiologique qu'il exerce sur l'homme et sur les animaux, souffle fréquemment pendant une partie de l'année sur la moitié méridionale du bassin. L'Algérie et la Tunisie sont surtout soumises à son action. Le *simoun* présente les mêmes caractères que le siroco ; seulement, soufflant sur des sables, il les soulève et les entraîne avec lui comme un brouillard épais qui arrête les rayons du soleil. Le siroco souffle aussi sur les côtes de l'Andalousie et du royaume de Murcie. Ces bandes de terre, protégées contre les vents de N. par des chaînes de montagnes parallèles à la côte, ont un climat saharien. On ressent dans les îles italiennes, sur l'Italie et même jusque sur les golfes de Gênes et du Lion des vents analogues. Mais, dans les localités où ces vents sont marins, ils arrivent chargés d'humidité, et, tout en gardant leur chaleur, ils modifient leur effet physiologique. Ils deviennent alors le siroco humide et débilitant d'Italie et de Corse.

Le *mistral*, vent d'entre N.-O. et N.-E. de la vallée du Rhône et des côtes du Languedoc et de la Provence, est connu depuis longtemps pour sa violence et sa sécheresse. Les bourrasques violentes de N. qu'on rencontre dans le voisinage des Baléares, les coups de vent de N.-O. des côtes d'Algérie et les vents de S.-E. et de S. qui font échouer en hiver tant de navires sur les plages sablonneuses du golfe du Lion, sont décrits par les marins qui ont fréquenté ces parages.

Indiquer le lien qui existe entre ces faits et les expliquer, tel est le but de ce mémoire. Pour y arriver, nous étudierons la circulation à la surface du bassin méditerranéen pendant l'année météorologique 1865, et nous la comparerons à la circulation générale de l'Europe pendant le même temps. La relation entre les directions des vents et les mouvements généraux de l'atmosphère ressortira, nous l'espérons, de cette étude.

CHAPITRE II.

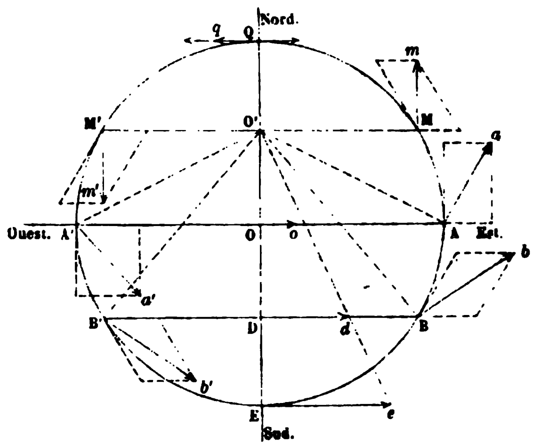
INFLUENCE DU PASSAGE DES BOURRASQUES SUR LES ROSES DES VENTS.

Le passage fréquent de bourrasques tournantes sur l'Europe complique les mouvements partiels de l'air. Quelques considérations nous semblent nécessaires pour mieux interpréter les roses des vents et démêler ce qui, dans ces roses, est dû aux bourrasques, aux courants généraux ou à des circonstances locales.

Supposons qu'un tourbillon dans lequel l'air tourne, comme on l'observe toujours dans l'hémisphère boréal, d'un mouvement rétrograde, c'est-à-dire en sens inverse des aiguilles d'une montre, ait son centre de rotation au point O (*fig.* 1) (on sait que ce centre coïncide avec le centre d'une dépression barométrique dans laquelle le vent est à peu près tangent aux courbes d'égale pression). Soit B ce point, situé non loin du centre de la rotation; l'air y est animé d'un mouvement de rotation; sa vitesse est perpendiculaire au rayon OB. Un observateur placé en B verra donc la girouette indiquer un vent de S.-O. S'il occupe successivement diverses positions sur la droite BB' per-

pendiculaire à NS, il sentira des vents variables suivant sa position : en D un vent d'O. et en B' un vent de N.-O. S'il se déplace sur la droite AA', diamètre perpendiculaire au méridien, il observera un vent de S.

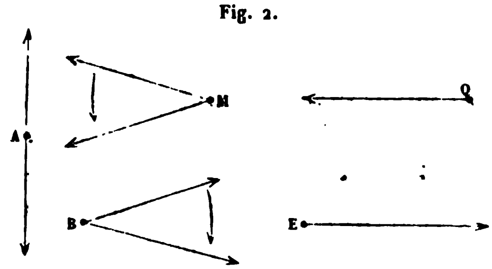
Fig. 1.



tant qu'il restera entre A et le centre du tourbillon ; en O, le vent sera variable ou nul ; et, aussitôt qu'il aura dépassé O, l'observateur éprouvera un vent de N. Enfin, allant de M à M' sur une droite parallèle à AA', il constatera d'abord un vent de S.-E. en M, puis en P un vent d'E. et en M' un vent de N.-E.

Représentant sur une feuille de papier les divers vents qu'il a observés, il obtiendra un angle dont le sommet sera vers l'O. pour tous les cas où il aura parcouru la moitié AEA' du tourbillon, deux

Fig. 2.



droites diamétralement opposées s'il reste sur le diamètre AOA'; enfin la rose des vents sera un angle ayant son sommet vers l'E. pour toutes

les cordes parallèles à AA′ et situées dans le demi-cercle AQA′. Ces angles seront d'autant plus ouverts que la corde sera plus voisine de AA′, et le vent des régions O y diminuera de durée. Les limites sont d'une part en Q et E, où le vent reste de l'E. ou de l'O., et la droite AA′ sur laquelle le vent change brusquement de direction du S. au N.

Les choses ne se passent pas tout à fait de la sorte dans la nature; les tourbillons se transportent à peu près de l'O. vers l'E. à travers l'Europe. Il y a donc une vitesse de translation à combiner avec la vitesse due à la rotation en chaque point. Les effets de cette combinaison sont en partie connus, et les marins savent que, dans tout tourbillon qui se déplace, il y a une moitié où le vent est fort et pousse le navire vers la ligne que le centre du mauvais temps va parcourir, tandis que, dans l'autre moitié, les vents sont moins forts et éloignent le navire du centre de rotation. De là l'expression connue de demi-cercle dangereux, pour désigner la première moitié, et celle de demi-cercle maniable, pour distinguer l'autre.

La Mécanique nous apprend que, si un disque est animé à la fois d'un mouvement de rotation autour d'un axe et d'un mouvement de translation suivant une droite perpendiculaire à cet axe, chacun de ses points est animé à un instant quelconque de la même vitesse que si, à cet instant, et pendant un temps très-court, le disque tournait autour d'un point convenablement déterminé, qui ne sera plus le même pendant l'instant suivant, et que, pour cette raison, l'on appelle centre instantané de rotation.

La position de ce point et sa variation sont faciles à déterminer dans le cas présent. Menons le diamètre NS; en tous les points de cette ligne situés au-dessous du centre O, les vitesses de translation et de rotation s'ajoutent; elles se retranchent dans l'autre partie de cette droite. Or, la vitesse due à la rotation est proportionnelle à la distance au centre. Il y aura donc un point de la ligne OQ, prolongée s'il est nécessaire au delà du point Q, où la vitesse de translation sera égale à la vitesse de rotation et de sens inverse. C'est ce point qui sera immobile pendant un instant. Pendant l'instant suivant, un autre point lui succède, et la seule condition qu'il doive remplir est d'être à la même distance du point O que le premier. La même condition devant être satisfaite, quelle que soit la position du disque tournant, le lieu des centres instantanés

successifs de rotation est une circonférence dont le centre est celui du disque tournant et le rayon déterminé par le rapport entre la vitesse de translation et la rapidité de la rotation.

Ce théorème peut s'énoncer encore de la manière suivante : si un disque tournant dans un plan est entraîné suivant une droite de ce plan, le mouvement de chaque point du disque est le même que si une circonférence concentrique au disque et fixée invariablement à lui, roulait sur une droite parallèle à la trajectoire du centre, et le centre instantané de rotation est à chaque instant le point de contact de la circonférence et de la droite.

Ce qu'on a dit dans le cas où le disque est immobile est donc encore vrai dans le cas où il a un double mouvement, si l'on rapporte tout au centre instantané de rotation, au lieu de le rapporter au centre de la rotation.

Un tourbillon gazeux peut, dans sa partie inférieure au moins, être assimilé à un disque tournant; la vitesse de rotation n'est pas, il est vrai, proportionnelle à la distance au centre de rotation; mais, quelle que soit la loi de sa variation, on pourra déterminer le centre instantané, et ce que nous avons dit relativement à sa détermination et au mouvement du disque s'applique à celui de l'air dans un tourbillon.

Par conséquent, en tous les points de la droite, lieu des positions successives des centres instantanés de rotation, le vent sera d'abord de S., puis il passera brusquement à N. pour conserver cette dernière direction. Dans tous les points situés au S. de cette droite, la rose des vents construite après le passage de la bourrasque donnerait des vents d'entre S.-S.-O. et N.-N.-O. par O., la rose étant d'autant moins ouverte que le point considéré est plus au S., et se réduisant à des vents d'O. au point le plus méridional, les vents d'entre S.-S.-E et N.-N.-E. par E. constitueraient au contraire la rose des vents pour tous les points situés au N. du lieu des centres instantanés. Ces derniers peuvent être dans le cercle d'action de la bourrasque ou à l'extérieur; ce qui précède n'en est pas moins vrai. Si la vitesse de rotation est grande et celle de translation faible, ce qui a lieu quand les cyclones sont dans la zone tropicale, les centres instantanés de rotation seront à une faible distance du centre de la rotation, A mesure que le cyclone avance dans sa course, il tend à entraîner dans son mouvement rotatoire l'air envi-

ronnant, d'où résulte un ralentissement dans sa rotation; en même temps sa vitesse de translation augmente. Ces deux causes agissent dans le même sens pour éloigner le centre instantané de rotation du centre du mouvement tournant.

Ce dernier est indiqué par le centre d'une dépression barométrique terminée par des lignes isobares concentriques plus ou moins circulaires. Près de l'Équateur, le vent a dans les bourrasques une vitesse à peu près égale tout autour du centre d'aspiration pour des points situés à la même distance de ce centre; le météore, à mesure qu'il progresse, élargit son cercle d'action, le demi-cercle dangereux, où les deux vitesses sont de même sens, se dessine de plus en plus, la vitesse du vent diminue dans le demi-cercle maniable, et elle est souvent nulle ou de même sens que dans le demi-cercle dangereux lorsque la bourrasque arrive dans nos parages. Il en résulte que, si les courbes d'égale pression ne venaient nous éclairer, nous aurions souvent une idée très-inexacte sur la position du centre de rotation.

D'après ce qui précède, lorsqu'une bourrasque passe sur une région, les roses des vents résultant de son passage diffèrent beaucoup, et nous devons les trouver semblables entre elles sur des zones parallèles à la trajectoire du centre.

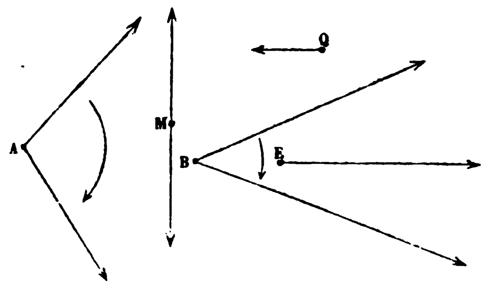
Les vents forts seront du sens de la translation; il y a cependant à cet égard une restriction à faire.

Un mouvement tournant de l'air au milieu d'une masse du même fluide non animée de ce mouvement rencontre des résistances sur sa limite extérieure. Elles tendent à ralentir la rotation, surtout dans les parties voisines de la circonférence. Il y a donc à une certaine distance du centre un cercle où la vitesse de l'air est maxima; soit ABA′Q (*fig.* 1) ce cercle. Soit P le centre instantané de rotation à l'instant considéré, BB′ la portion de la bourrasque qui passera au point B; le vent aura d'abord sa vitesse maxima avec une direction de O.-S.-O.; puis des portions plus voisines du centre passeront au lieu B, et, en même temps que le vent tournera à O., sa force diminuera pour s'accroître de nouveau lorsqu'il tournera à O.-N.-O. En des points plus voisins de la droite AA′, le même effet se produira, mais plus marqué, et la rotation du vent sera plus considérable. On voit donc qu'il y aura deux maxima

distincts dans la force du vent, et que leurs directions font des angles égaux avec la droite suivant laquelle s'effectue le transport général.

Plusieurs conséquences curieuses résultent des discussions précédentes. Si une bourrasque entrainée par un courant d'O. passe sur une

Fig. 3.



région, le vent sera d'O. sur la zone méridionale, il variera de S.-O. à N.-O. par O. dans tout le demi-cercle méridional, il passera brusquement du S. au N. sur le lieu des centres instantanés de rotation; plus au N., il variera de S.-E. à N.-E. par E., et il sera d'E. sur la zone la plus septentrionale. Ainsi *un courant d'O. peut exister par tous les vents*, mais on voit immédiatement que les roses sont symétriques par rapport à la direction du courant, et que leurs extrêmes sont les vents à force maxima.

Une bourrasque passe-t-elle à peu près à la même latitude, suivant une même direction, le mélange des roses de vents dues aux deux passages ne changera que peu de chose dans les zones limites; il introduira un mélange de vents d'E. et de vents d'O. dans la zone médiane.

Si plusieurs bourrasques traversent une région dans le même sens à des latitudes notablement différentes, le mélange s'augmentera, mais la direction des vents forts éclairera toujours l'observateur sur le sens du mouvement général, et la proportion des vents très-faibles aux autres sera une bonne indication pour connaître le rapport du nombre des bourrasques passées au N. à celui des bourrasques passées au S.

CHAPITRE III.

LES VENTS SUR LE BASSIN MÉDITERRANÉEN PENDANT L'ANNÉE MÉTÉOROLOGIQUE 1865. — LEUR COMPARAISON AVEC LES MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ATMOSPHÈRE EN EUROPE.

Hiver. — L'hiver comprend les trois mois de décembre 1864, janvier et février 1865.

La carte ci-jointe (*Pl. II*) indique clairement la circulation que nous voulons expliquer. Une semblable a été dressée pour chaque saison au moyen de tous les documents que l'on a pu recueillir sur terre et sur mer. Les observations terrestres ont été réduites à la manière ordinaire; elles ont été faites à 8 heures du matin et à 4 heures du soir. En quelques villes, telles que Rome, Constantinople, Nice, Orléansville, etc., plusieurs observations ont été faites par jour; les moyennes calculées, en en tenant compte, diffèrent peu de celles que l'on déduit de deux observations faites le matin et le soir aux heures indiquées plus haut; nous nous en sommes tenu à ces deux indications journalières.

Les observations maritimes ont été extraites des registres tenus à bord de la marine impériale et des navires du commerce. Des observations faites à 8 heures du matin et à 4 heures du soir à bord de ces navires ont été pointées sur des cartes analogues à celles de Maury. Une carte correspondait à une saison.

Chaque rose de vents est représentée sur les cartes résumées ci-jointes (*Pl. II* et *III*) par plusieurs lignes droites émanant d'un même point, qui est le lieu vrai ou supposé d'observation. La direction des droites indique la direction du vent; elles sont tracées, suivant l'habitude des marins, sous le vent de la station; ainsi une droite dirigée du point central vers E. dénote un vent d'O. Enfin la longueur de ces droites est proportionnelle au nombre de fois qu'a soufflé le vent correspondant. La somme de leurs longueurs est constante, de manière que toutes soient comparables entre elles.

Les vents de toute intensité étant pointés sur quatre cartes, on en a pour ainsi dire extrait les vents assez forts et les vents forts de la manière suivante.

Pointant à part les observations de ces vents, on en a fait des roses ramenées à cent vents de toute intensité. Les quatre cartes de vents jointes à ce mémoire (*Pl. II* et *III*) correspondent à ceux de toute intensité. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats donnés par les cartes des vents forts.

Ceci posé, jetons un coup d'œil sur la carte des vents de toute intensité pour l'hiver. On y remarque sur les côtes de France et d'Espagne, de Marseille à Alicante, une grande prédominance des vents d'entre N. et O., et en quelques points le N.-O. règne presque sans partage. On voit à peu près la même chose sur les côtes de l'Algérie, et le même régime atmosphérique se continue dans l'intérieur du pays sur les pentes septentrionales de l'Atlas. Notre station la plus méridionale, Laghouat, située sur la limite du désert, est soumise à des vents des mêmes directions, mais inclinant un peu plus vers l'O. Dans la province de Constantine et la Tunisie, ainsi que dans le canal de Malte, le N.-O. redevient dominant; il est remplacé par l'O. tournant vers le S.-O. à mesure que l'on approche de la Syrie et de l'Asie Mineure.

Continuant le tour du bassin, nous trouvons sur la mer Noire des vents dominants d'entre N. et E. Ils tournent à E. au sud des Karpathes dans la vallée du Danube et au N. à Constantinople, pour être variables, mais avec une tendance marquée vers S.-E., sur l'Archipel et la Grèce. L'E. domine dans les roses de l'Adriatique orientale et l'O. dans celle d'Ancône, sur la rive occidentale; mais si nous en dégageons les brises de terre et de mer, autrement dit, si nous nous bornons aux vents forts, l'E.-S.-E. domine à Lessina et l'E. à Trieste, tandis qu'une grande variabilité se remarque à Ancône.

L'E. domine dans la vallée du Pô; il tourne vers le N. à mesure qu'on s'avance vers l'O., et le N.-E. règne dans le golfe de Gênes, avec quelques alternances d'O. et de S.-O. Le même N.-E. se remarque dans la mer Tyrrhénienne et jusqu'au S.-O. de la Corse; le N. s'observe dans le voisinage des Baléares, et une région peu étendue de vents variables s'étend entre ces iles, la Corse et la Sardaigne.

L'air retourne vers le S. et l'O. en longeant la côte d'Espagne, et les vents, variables d'O. à E. par N. sur les côtes de Murcie et d'Andalousie, dominent de l'E. au détroit de Gibraltar, près de Tarifa. Cette prédominance n'existe que près des côtes d'Espagne; plus au S., le N.-O.

et l'O. reprennent leur empire, et le même phénomène se remarque au delà du détroit, comme le montrent une rose de Fernando et une rose maritime voisine.

La distribution des vents forts est très-analogue à celle des vents de toute intensité; fréquents sur les côtes du Portugal et du S. de l'Espagne, ils sont plus rares sur les côtes de la province d'Oran; du golfe du Lion à la province de Constantine ils apparaissent en grand nombre des régions N.-O. inclinant vers l'O. et S.-O. dans le voisinage de l'Algérie; moins nombreux sur l'Italie centrale et le royaume de Naples, ils reprennent leur fréquence aux approches de la Dalmatie et de l'Illyrie; à Lessina ils sont surtout de S.-E.; à Trieste, près de la vallée du Pô, ils sont presque uniquement de l'E. Les vents forts observés à Livourne et dans le golfe de Gênes sont de directions variables; l'O. domine, puis le S.-O., en dernier lieu le N.-E. Rome subit le plus souvent des vents forts des régions N, et, parmi les vents forts de Naples, le S.-O. est le plus fréquent. Le N.-E. et le N. sont les vents forts les plus ordinaires sur la mer Noire et les régions voisines, et leur rapport au nombre total des vents est grand; enfin l'O. variant au S. a de la force entre la Grèce, l'Asie Mineure et l'Afrique.

Il y a donc une assez grande analogie entre les deux systèmes de roses; cependant certains parages semblent recherchés de préférence par les vents forts, tandis qu'ils se montrent dans d'autres beaucoup plus rarement.

En suivant une ligne qui, partant des environs de Marseille, passe près de la Corse, de Naples, traverse le golfe de Tarente, l'archipel des îles Ioniennes, la Morée et les Sporades, et longe en dernier lieu la côte méridionnale de l'Asie Mineure, on remarque qu'à l'O. et au S. de cette ligne les vents, surtout les forts, sont des régions O., qu'à l'E. et au N. ils sont des régions E., variant d'entre S.-E. et N.-E., suivant les régions; les vents dominants sont de S.-E. et N. sur la mer Noire, et de N. à Constantinople.

Une molécule d'air placée sur la côte orientale d'Espagne ou dans le golfe du Lion rencontrerait près des Baléares des vents de N.; elle serait, suivant sa proximité de l'Espagne, ramenée vers le détroit de Gibraltar ou bien poussée vers l'Algérie, où des vents des régions O. la dirigeraient vers la Sicile et l'Adriatique; des vents de S. l'amèneraient à

Lessina (Dalmatie), où le S.-E. la ferait remonter vers la vallée du Pô; elle reviendrait dans le golfe de Gênes sous l'influence de vents d'E. et le N.-E. la ramènerait près de son point de départ pour recommencer la même rotation.

Pour comprendre le sens de ces deux faits, étudions ce qui s'est passé pendant ce temps sur l'Europe. Ce qui suit a été obtenu au moyen des documents publiés dans le bulletin quotidien de l'Observatoire impérial de Paris.

Circulation atmosphérique à la surface de l'Europe pendant l'hiver de 1865. — Au commencement de décembre 1864 un tourbillon passe sur les Iles-Britanniques, la mer du Nord, la Norwége, la Laponie et la mer Blanche. Il disparaît au N.-E. de l'Europe. L'air, animé du mouvement giratoire habituel dans ces phénomènes autour du centre dont nous venons de tracer la route [*voir* la carte des trajectoires des bourrasques pour décembre 1864 (*Pl. IV*)], donne successivement dans les régions énoncées plus haut des vents de S. tournant à S.-O. puis à N.-O. et N. pour revenir rapidement à S.-O dès le 2 au matin sur l'Irlande. Le vent reste des régions S. jusqu'au 5 et il tourne le 6 à O. sur l'Irlande, l'Écosse et la Norwége, il est encore en général de S. ou de S.-O. sur la Suède et la Russie septentrionale; une nouvelle bourrasque tournante a suivi la première, mais son centre passant à une latitude plus faible, elle redescend vers le S.-E. en se dirigeant vers l'Oural. Aussi le baromètre avait-il beaucoup baissé sur le N. puis sur l'E. de l'Europe après une hausse peu durable.

Le 6 décembre, le vent a tourné à N.-O. sur la Baltique, et le baromètre a remonté. Le mouvement de l'air autour du centre de dépression s'étend jusqu'à la mer Noire où le vent, de N.-E. le 6 au matin, a passé le 7 S.-O. Le baromètre baisse, mais le centre passe loin à l'E. de la Crimée et le vent tourne vers N. à Odessa sans prendre de force.

En même temps que le baromètre remontait sur la Baltique avec le tour du vent de S.-O. à N.-O., il baissait rapidement sur l'Écosse et sur l'Irlande; et le vent y tournait à S.-O. Un nouveau météore, comme les précédents du genre de ceux que M. Marié-Davy appelle *bourrasques* (*).

(*) Quand nous emploierons l'expression de *bourrasques*, nous voudrons désigner un *mouvement tournant* et non les coups de vent auxquels son passage donne naissance. *Tempête*,

en sous-entendant l'épithète de *tournantes* qui leur donne un caractère commun, abordait l'Europe.

Jusqu'alors la Russie centrale, la mer Noire, l'Allemagne, l'Autriche et la Turquie, le massif des Alpes et la péninsule Hispanique avaient des vents d'entre N. et E.; l'air y était froid et dense. Les cartes journalières montrent pendant cette période une zone oblique de fortes pressions qui traverse diagonalement l'Europe de Moscou à Madrid. L'influence des mouvements tournants dont nous venons de suivre la route inclinait au S.-E. et au S, la direction du vent sur les côtes du S.-O. de l'Europe. L'air condensé s'écoulant vers le S. laissait petit à petit le champ libre aux bourrasques dont les trajectoires diminuaient d'amplitude vers le N. et l'E.

Enfin une bourrasque se montre à la hauteur de la Manche; elle étend son action jusqu'à Lisbonne, où le vent est fort O., tandis que le S.-O. prend de la force sur la France occidentale. Le baromètre n'a cessé de baisser sur l'O. de l'Europe, la baisse s'étend vers le golfe de Gascogne, un centre de dépression barométrique s'y montre, et le vent, qui est de N.-O. à la Corogne (pointe N.-O. de l'Espagne), est de S.-E. sur la Gascogne et le Poitou. Le mouvement annonce son arrivée sur la Méditerranée par la rotation du vent de N.-E. vers S.-E sur les côtes de France; cette rotation s'effectue du 9 au 10. Le 11, le vent est retourné un peu vers E.; il est resté de N.-O. sur l'Espagne, où il n'a pas de force, de S.-O. sur la Sicile et de S.-E. sur l'Adriatique; le mouvement tournant passe sur le bassin méditerranéen occidental.

Mais le baromètre remonte sur les Iles-Britanniques et tout le N. de l'Europe, et il baisse très-vite sur le Portugal pendant que le vent reste à S. Cela tient à l'arrivée d'une bourrasque dont le centre passe très-près de Lisbonne pendant la nuit du 13 au 14, et y donne deux violents coups de vent. Le 14 on voit son centre sur le N. de l'Espagne; la bourrasque reprend le 15 sa route vers l'E.-S.-E; son centre passe près de

---

sans l'épithète *tournante*, s'appliquera à la force du vent. Le mot de bourrasque n'indiquera rien pour nous de l'amplitude du mouvement tournant; quand nous dirons : la bourrasque a suivi telle trajectoire, nous voudrons parler de la route suivie par son centre; nous dirons jusqu'où elle étend son action et nous citerons autant que possible les lieux où ses effets auront été remarquables, surtout par rapport au but que nous nous proposons d'atteindre.

Barcelonne; on le voit le 16 au matin près du détroit de Bonifacio, et le 17 il a disparu dans l'E.

Les vents étaient pendant ce temps des régions E. sur le N. de la Méditerranée, des régions O. variant de S. à S.-O., O. et N.-O. sur le S. Le calme règne sur toute l'Europe pendant la matinée du 17; les fortes pressions sont sur le N.

Des bourrasques moins intenses passent les 18, 19, 20 et 21 à peu près à la même latitude; leur ligne de parcours tend à s'élever vers le N.; il en résulte que la masse d'air en rotation se partage en heurtant les Alpes, et que de petits mouvements tournants traversent l'Allemagne méridionale, pendant que les plus importants parcourent la Méditerranée. A part l'intensité, ils donnent lieu aux phénomènes analysés plus haut.

Cependant la masse d'air dense qui s'amasse sur le N. de l'Europe s'avance chaque jour vers l'O., et nous voyons le vent tourner de N. à O. à Haparanda, où le baromètre baisse rapidement. Le même effet se continue les jours suivants et l'O. s'établit sur la Baltique et la Russie occidentale; le 25 on voit au N. de la Suède le centre d'un mouvement tournant; son action s'étend jusqu'à Skudesnoess (Norwége méridionale), Libau (Livonie) et Pétersbourg. Il descend vers la Caspienne et l'Oural; son centre est le 26 sur la mer Blanche, le 27 vers Nijné-Taguilsk, et le météore disparaît de nos cartes.

Une hausse légère du baromètre se produit et le calme revient le 27 sur la Russie et la Scandinavie, mais les vents restent d'entre S. et O.; ils sont assez forts dans le N. et le baromètre y baisse. La carte du 28 montre que ces effets doivent être attribués à l'arrivée d'une bourrasque dont le centre apparaît le 28 près d'Haparanda. Son action s'étend plus loin que celle de la précédente; elle se fait sentir jusque sur l'Écosse, les Pays-Bas, la Prusse et la Russie centrale, mais les vents auxquels elle donne naissance se montrent sur une zone moins éloignée du centre et passant par Skudesnoess, Copenhague et Pétersbourg. A peine cette bourrasque disparaît-elle dans l'E. où son centre est arrivé le 29 près d'Arkengel, faisant tourner le vent à O. et à N.-O. sur la Baltique orientale, que le calme s'établit sur la Suède, tandis que des vents assez forts d'entre S. et O. soufflent sur les côtes de Norwége. Le baromètre a remonté sur la Russie et la Scandinavie; il a baissé sur

l'Écosse; du 29 au 30 la baisse s'étend à l'E.; elle est considérable à la latitude de Stockholm et les vents ont repris en même temps beaucoup de force d'entre S. et O. sur ces régions; le lendemain la bourrasque a disparu dans l'E.; une autre, venue du même côté, lui succède à une latitude plus basse. Elle a le 31 son centre sur la Suède, près de Stockholm, et elle descend vers la mer Noire. On voit que les trajectoires des bourrasques se sont abaissées successivement vers le S. en diminuant d'amplitude vers l'E. pendant la dernière décade du mois.

Que se passait-il sur le reste de l'Europe, et en particulier sur la Méditerranée ?

Nous avons quitté ces régions après le passage de plusieurs bourrasques, au moment où le calme tendait à s'y établir. Les fortes pressions barométriques marchant vers l'O., des vents d'entre E. et N. s'établissent sur les Iles-Britanniques, l'Europe centrale, la France, le N. de l'Espagne et l'Italie; le N.-O. souffle à Madrid et l'O. sur les côtes d'Algérie. Une dépression barométrique existe sur ces régions; elle s'éloigne vers l'E., et les vents d'entre E. et N. s'établissent de plus en plus sur le S. et l'O. de l'Europe; ils soufflent jusqu'à Lisbonne et Tarifa le 23, jour où le vent tourne à N.-O. sur la Baltique. Le centre des fortes pressions est alors sur la mer du Nord.

Le 24, les vents prennent de la force d'entre N. et E. sur le Portugal et l'Espagne, le baromètre baisse du 24 au 25 sur l'Espagne, surtout sur le midi; la baisse s'étend vers l'E. du 25 au 26 et les vents restent d'entre E. et N.; la baisse augmente, et le 27 un centre de dépression existe près de la Sardaigne. Le S.-E. commence à Lessina (Adriatique), le S. à Palerme et le N.-O. sur l'Espagne. Ce dernier prend de la force, les vents des régions E. diminuent sur l'Italie, la girouette indique le S.-O. à Palerme, le 29 au matin; le 30 le vent y tourne à N.-O.; il est resté aux régions E. ou N. sur l'Italie et l'Adriatique. Le centre de dépression barométrique s'éloigne vers la Grèce. Pendant ce temps, l'Europe centrale et la France sont restées dans le calme. C'est là que le baromètre est le plus haut sur une région formant un angle dont l'ouverture est à l'O. Cette région s'amincit d'abord par le N. et l'E., puis par le S. et enfin par l'O.; l'air y reprend une pression moyenne de 760 millimètres, tandis que quelques jours auparavant elle dépassait 770 millimètres en beaucoup de points. Les vents y restent faibles.

L'abaissement vers le S. des trajectoires des bourrasques continue pendant le mois de janvier 1865, et nous voyons successivement pendant les premiers jours du mois la mer du Nord et la Manche soumises à des vents forts de S.-O. pendant que les régions calmes et à fortes pressions forment un triangle dont le sommet serait dans l'Europe centrale et la base vers le Portugal. Aussi, le régime des vents est-il changé sur la Méditerranée; le N.-O. et le S.-O. ont pris dans le golfe du Lion la place du N.-E. et du S.-E., et les brises sont variables sur l'Italie et sur l'Espagne.

Des bourrasques traversent vers les 6, 7, 8 et 9 la Russie du N.-O. au S.-E. et au S., étendant leur action jusque sur l'Europe centrale; des grains passent sur l'Italie et l'Adriatique; d'autres bourrasques abordent le continent plus au S. encore que les précédentes. L'un de ces météores a, le 12, son centre près des îles Hébrides (Écosse); il étend, le 15, son action jusque sur l'Espagne et sur l'Italie; des vents forts de S.-O. ou d'O. soufflent de Lisbonne à Livourne; les vents d'O. sont en même temps d'une violence extrême sur les côtes du golfe de Gascogne et de la Manche, sur la France et sur le S. de l'Angleterre; ils sont moins forts un peu plus au N. et sont très-faibles sur l'Écosse. Le S. souffle assez fort à Libau (Baltique russe) et le S.-E. à Skudesnoess (Norwége) pendant que le vent est de N.-O. à Greencastle (Irlande) et à Nairn (Écosse). Le météore s'avance vers l'E., et, le lendemain 15, le vent est toujours violent sur l'Espagne, la France et les Pays-Bas, mais il commence à tourner à O. et O.-N.-O. Il prend de la force d'O. sur l'Italie et l'Adriatique, et le S.-O. commence sur la mer Noire pendant que le S.-E. souffle à Saint-Pétersbourg. La bourrasque continue sa route vers le S.-E. et disparaît de nos cartes le 16.

D'autres, produisant des effets analogues, traversent l'Europe les 17, 18, 19, 20, 21, 22 janvier; l'une d'elles a, le 20, son centre sur le Jutland; son action s'étend jusqu'aux Alpes et à la mer Noire; le centre arrive à l'embouchure du golfe de Riga le 21 janvier. On en voit, le même jour, un nouveau ayant son centre sur le golfe de Gascogne; il remonte au N. des Alpes pour traverser la France septentrionale, les Pays-Bas, l'Allemagne, la Pologne, la Russie et la mer Noire pendant que les fortes pressions se montrent dans les environs de la mer Blanche. Pendant son passage, les vents restent des régions E. ou N.

sur la Manche, l'Angleterre, les Pays-Bas, le Danemark, le N. et l'E. de la Russie : ils sont des régions S. ou O. tournant vers le N. sur le midi de l'Europe, excepté sur les côtes orientales de l'Adriatique où le S.-E. et l'E. soufflent le 22. Un faible centre de dépression barométrique se montre le même jour près de Livourne. Un tourbillon qui, dès le 23, donne sur l'Espagne et le Portugal des vents forts des régions S.-O., traverse l'Europe les 24, 25 et 26 en passant au N. du massif alpin et donnant seulement quelques coups de vent de S. ou O. sur le bassin méditerranéen.

Nous voyons le 26 une nouvelle bourrasque dont le centre est encore sur l'Océan à la latitude de la Manche; la France, les Iles-Britanniques et presque tout le reste de l'Europe sont encore calmes. L'O. de l'Espagne et le Portugal sont seuls soumis à des vents violents de S.-O.; le vent de S. prend de la force dès le soir sur le golfe du Lion, et, le mouvement marchant vers l'E., le vent est fort le lendemain 27 sur toute la France, de S.-O. à Besançon, d'O. au Havre, de N.-O. à Brest. Le S.-E. commence à prendre de la force au S. de l'Adriatique; le N. et l'Italie sont encore peu agités. Le tour des vents à N. sur la Manche le 28, à N.-O. sur les côtes du Languedoc et de la Provence, à S. et à S.-O. sur l'Italie centrale et l'Italie méridionale n'a rien qui doive nous étonner après les nombreux exemples de faits analogues que nous avons déjà remarqués dans notre analyse.

Les vents sont restés pendant ce temps à S.-E. et N.-E. sur la Scandinavie, la Baltique et la Russie; ils commencent à être forts le 28; leur force augmente le 29. Le centre de la bourrasque est alors sur la Livonie; il descend vers la Caspienne le 30 et le 31. Un autre mouvement tournant se montre en même temps sur la mer Tyrrhénienne avec un fort mistral sur le golfe du Lion, des vents d'O. sur le S. de l'Italie, de S. à Lessina (Dalmatie), d'E. à Trieste et de N.-E. à Livourne. Le calme s'établit sur la France, l'Angleterre et l'Espagne. Le S.-O. reprend le 29 à Coruna et le S. souffle avec force sur le golfe de Gascogne. Le baromètre, qui a un peu monté, baisse sur l'Europe occidentale, et une bourrasque aborde nos côtes; le 31 janvier elle se fait sentir par des vents forts de S.-O. sur le Portugal et le N.-O. de l'Espagne. Son centre est sur l'Océan, à l'O.-N.-O. des Iles-Britanniques.

Le 1er février, il s'approche des îles Hébrides en descendant vers

l'E.-S.-E. Il est le 2 près d'Édimbourg; puis, au lieu de continuer sa route vers l'Allemagne, il est brusquement rejeté dans le N. et suit le versant occidental des Alpes Scandinaves. Une nouvelle bourrasque a le 3 son centre sur le S.-O. de l'Irlande; le centre passe ensuite sur l'Allemagne, le S. de la Russie et la mer Noire.

Une partie du mouvement, transportée sur la Méditerranée, passe sur le S. de l'Italie. Il s'ouvre alors pour l'O. et le S. de l'Europe une ère de mauvais temps qui dure presque sans interruption jusqu'à la fin du mois. Des bourrasques se succèdent très-rapidement sur cette région qu'elles traversent, ainsi que l'indique la carte d'ensemble, de l'O.-N.-O. à l'E.-S.-E. Leur rayon d'action est très-considérable, et elles donnent sur l'Espagne, la France et l'Italie des vents violents variant du S.-O. au N.-O., puis au N., tandis que la girouette indique presque sans cesse l'E. variant du S.-E. au N.-E., puis au N. sur la Scandinavie et la Russie septentrionale.

Les pressions barométriques, considérables sur le N. de l'Europe dans les premiers jours du mois, passent bientôt sur l'O. où elles séjournent, s'éloignent plus ou moins vers l'O., descendant en même temps vers le S. pour céder la place à une bourrasque; enfin elles s'étendent à la fin du mois avec le calme et le beau temps sur l'Espagne, la France et l'Italie. Elles sont de nouveau rejetées au S. par l'arrivée d'une bourrasque; l'action du météore s'étend déjà le 28 sur les Iles-Britanniques, la France, les Pays-Bas, la mer du Nord et le S. de la Norwége; son effet est le même que celui de ses prédécesseurs.

Explication des faits précédents — Nous venons de voir comment les vents ont varié à la surface de l'Europe pendant l'hiver 1864-65. Ils étaient souvent forts de l'O. et N.-O. sur une région pendant que non loin de là soufflaient l'E. et le S. Nous avons vu comment la rotation de S.-O. à N.-O. se produit par suite du passage des bourrasques lorsque l'on se trouve dans une partie du tourbillon, comment elle s'effectue de S.-E. vers N.-E. ou N. quand on est dans la partie opposée.

Or, comme le dit M. Marié-Davy, les bourrasques sont de vrais flotteurs entraînés par les courants généraux de l'atmosphère, comme le sont par les courants d'eau les petits tourbillons qu'on voit se former dans la rivière. Le sens de leur translation donne celui du courant

atmosphérique dans lequel ils sont plongés (*). L'air est, dans une bourrasque, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, ce qui empêche le vent d'indiquer toujours la direction des courants atmosphériques généraux.

Nous avons vu que, pendant presque tout l'hiver, lorsque des bourrasques passaient sur la Méditerranée, elles arrivaient par l'Espagne ou le golfe de Gascogne et traversaient cette mer de l'O. à l'E., ou, plus souvent, de l'O.-N.-O. à l'E.-S.-E.; aussi, avons-nous vu que les vents ont une prédominance marquée pour les régions O. au S. de la ligne oblique qui va de l'embouchure du Rhône à la Sardaigne, l'Italie méridionale, la Grèce et les côtes S. de l'Asie Mineure, tandis que les vents dominants sont au N. de cette ligne d'entre S.-E. et N.-E. Les vents forts sont surtout de N.-O. et de S.-O. entre la France et l'Algérie et sur le bord de la Méditerranée, d'entre S.-E. et N.-E. ou N. dans les autres parties.

Quelques particularités remarquables s'expliquent par les conditions particulières que présente le bassin méditerranéen. Au N. il est borné par les Alpes, chaîne de montagnes très-élevées et à pentes rapides. S'abaissant par gradins vers les Pays-Bas, le Jutland et la Prusse, elles tournent vers l'Italie leur versant le plus abrupte. A l'O., une autre chaîne très-élevée encore, celle des Pyrénées, court de l'O. à l'E. Dans sa partie occidentale elle touche à la mer et aux montagnes des Asturies; dans sa partie orientale les montagnes Noires la relient aux Cévennes et au plateau central de la France; à l'E., elle s'avance dans la mer en formant un golfe profond, célèbre par les coups de vent qu'on y essuie. Il y a donc entre les Alpes et les Pyrénées un couloir de forme évasée, qui se rétrécit vers l'E. Quand l'air s'y engouffre, il

(*) Cet énoncé général a besoin d'une restriction. Les cartes montrent que parfois une bourrasque est plus ou moins brusquement déviée de la direction qu'elle suivait. Plusieurs causes peuvent donner naissance à ce phénomène, et, parmi les plus importantes, il faut noter l'influence réciproque exercée par deux bourrasques voisines l'une sur l'autre. Cette action a été reconnue pour la première fois par M. Marié-Davy. Ce météorologiste a fait voir que l'action réciproque des deux bourrasques se manifeste en général par une rotation des deux centres autour d'un même point, quelquefois très-voisin du centre de l'une des bourrasques. Nous renvoyons pour de plus amples détails aux Notes dans lesquelles M. Marié-Davy a étudié ces faits curieux.

acquiert à la sortie une grande vitesse. Nous verrons plus loin comment le vent qui en résulte, le mistral, se rattache aux mouvements généraux. Ce vent, d'entre N.-O. et N. suivant les points, est un violent courant d'air qui descend vers la Sardaigne. Il donne naissance à des remous remarquables.

Si deux murs élevés forment un angle dont le sommet est opposé à un vent régnant, un effet analogue se remarque. Supposons que l'un des côtés de l'angle soit dirigé du S. au N., l'autre de l'O. à l'E., de sorte que l'ouverture de l'angle soit vers le N.-E.; quand un vent d'O. soufflera fort, il se fera le long du côté N. un appel d'air du sommet de l'angle vers l'extérieur. Cet appel peut se manifester par la présence de corps légers, tels que de petits morceaux de papier ou des feuilles sèches. Ils sont entraînés au dehors. L'air affluant des parties plus éloignées pour remplir le vide, le courant se replie vers l'intérieur de l'angle, et les feuilles qu'ils avaient entraînées reviennent pour recommencer le même circuit. La rotation n'a pas toujours la même ampleur, mais toujours elle a lieu dans le même sens; par exemple, elle est du sens direct dans le cas que nous venons d'examiner. Le tourbillon engendré, après avoir séjourné plus ou moins longtemps près du lieu de sa formation, est enfin entraîné par le courant général ; mais alors la cause de la rotation ayant cessé d'exister, cette dernière ne tarde pas à se ralentir et même à cesser tout à fait, de sorte que l'on n'observe plus, à quelque distance, que le courant général.

Le phénomène que nous venons de décrire est connu de tout le monde sous le nom de remous, mais il se produit rarement sur une aussi vaste échelle que sur l'Adriatique, l'Italie et le golfe de Gênes. Rarement aussi les conditions sont aussi favorables à sa production. Les Alpes, s'élevant presque comme un mur, se dirigent d'abord du S. au N., puis du S.-O. vers le N.-E , de l'O. vers l'E.; et, redescendant vers le S.-E., elles enferment dans un cirque de hautes montagnes le golfe de Gênes, la vallée du Pô et l'Adriatique. Les points les plus élevés de la chaîne sont dans sa partie occidentale. Si le mistral souffle avec un peu de force et de persistance, on ne tarde pas à voir le vent augmenter de vitesse d'entre E. et N. sur le golfe de Gênes, d'E. sur la vallée du Pô et l'Adriatique septentrionale, de S.-E. sur le reste de l'Adriatique et d'O. vers le S. de l'Italie et la Sicile, pendant que le N.-O. souffle

sur la Sardaigne et les îles Baléares. Le baromètre baisse alors sur l'Italie septentrionale et l'on observe au S. des Alpes un minimum barométrique local qui se transporte bientôt dans le sens des courants généraux. Nous donnerons, dans un autre chapitre, des exemples de ce cas qui se présente assez fréquemment. Il nous suffit actuellement de l'avoir signalé.

Les hauts plateaux de l'Espagne arrêtent aussi l'air des couches inférieures; il en résulte que le vent du N. domine près des côtes S.-E. et cède même la place à l'E. entre l'Espagne, la province d'Oran et le Maroc. Cet effet, purement local, cesse d'être sensible à quelque distance des côtes, ainsi que le montre la carte des vents pour l'hiver 1865. Les montagnes espagnoles ne forment pas, comme les Alpes, une anse profonde, et elles ne permettent pas la formation de remous aussi bien accentués; l'air y revient seulement vers le N., le N.-E. et l'E.

Enfin de hautes montagnes, dont la cime se refroidit beaucoup en hiver, produisent alors autour d'elles dans les périodes de calme un flux d'air froid remplacé par l'air plus chaud des régions voisines, qui, s'élevant dans les régions plus élevées de l'atmosphère, redescend sur le sommet de la chaîne pour remplacer l'air qui s'est écoulé. Nous montrerons plus loin que les vents violents du N. observés sur le N. de l'Italie en février 1865 ne sont pas dus à cette cause; elle n'agit efficacement que pendant les calmes et ne donne pas naissance à de grands vents sur de grandes étendues. On y rattache les phénomènes connus depuis longtemps sous le nom de *brises de montagnes*, analogues aux *brises de rivages*.

Circulation pendant le printemps de 1865. — Cette saison commence avec le passage de plusieurs bourrasques qui traversent l'Europe du N.-O. au S.-E.; leurs centres passent sur le N. de l'Écosse, la mer du Nord, le centre de l'Europe et la Méditerranée, et leur action s'étendant souvent jusqu'au S. de l'Espagne, il en résulte pour cette partie de l'Europe une grande variation de vents. Le N. souffle surtout avec violence sur la mer du Nord, le golfe de Gascogne et la France; le N.-O. domine sur la péninsule Hispanique. Les centres passent en général sur la Méditerranée ou sur les provinces danubiennes et la Turquie, ce qui donne sur la mer Noire des vents d'entre S.-E. et N.-E. Les fortes pres-

sions se montrent vers le commencement du mois sur le N.-E. de l'Europe; elles s'avancent pendant les jours suivants vers l'O. en restant confinées sur la Scandinavie. Des bourrasques traversent l'Europe occidentale. Leurs trajectoires ont une tendance remarquable à la direction N.-S.; en même temps, la France et l'Allemagne, l'Espagne et l'Italie, sont balayées par des vents violents des régions N. qui donnent à ce mois son cachet spécial. Les vents des régions E. ou S. l'emportent sur l'Europe orientale. De nombreux centres de mauvais temps se sont fait remarquer sur le midi, particulièrement au S. des Alpes, ainsi qu'on le voit dans la carte résumée.

La carte des trajectoires des centres des bourrasques montre pendant le mois d'avril un changement dans la circulation atmosphérique. Les bourrasques se dirigent plus de l'O. vers l'E.; elles passent pendant la plus grande partie du mois sur le N. de l'Europe et le calme règne sur le centre et le S.; dans la dernière décade, les trajectoires de ces météores commencent à s'abaisser de la Suède sur l'Europe centrale, et l'un d'eux a, le 18 avril, son centre sur la Manche.

Cette modification à la direction des courants généraux se continue pendant le mois de mai. Les trajectoires des bourrasques prennent de plus en plus d'amplitude vers l'E. et elles sont pendant une partie du mois dirigées de l'O.-S.-O. vers l'E.-N.-E, ne s'abaissant un peu vers le S. que sur la Russie. Il fait, en général, peu de vent sur la Méditerranée; le calme y est troublé quelque peu par le passage de mouvements orageux. Les variations que nous venons de signaler dans le régime des courants rendent les vents très-variables sur presque toute l'Europe, et les orages commencent à quitter le bassin méditerranéen pour éclater fréquemment sur la France et sur l'Allemagne. La description et les lois de ces phénomènes ne peuvent entrer dans les étroites limites de ce mémoire; elles sont développées dans un travail publié sur ce sujet par M. Fron.

Les vents sont pendant cette saison plus variables qu'en hiver. Les vents forts ont toujours sur l'Algérie une direction générale variant entre N.-O. et S.-O.; cette direction se continue jusqu'à Laghouat dans le désert. Par exception, le N.-O. et le S.-E. alternent à Biskra. Cette anomalie est due à la direction des vallées. Le S.-O. fort souffle le plus souvent à Naples, le S.-E. à Lessina, l'E. à Trieste, les vents d'entre

E. et N. à Nice. Le mistral se reconnaît toujours sur le golfe du Lion à la forme des roses, et les vents de N. tournant vers E. dominent sur les côtes d'Espagne, comme nous l'avons constaté pour l'hiver.

La rotation apparente de l'air dans le bassin occidental, déjà constatée pour l'hiver, se retrouve au printemps, mais moins nettement accentuée. Des éléments étrangers se sont en effet introduits dans chaque rose, ce qui tient au plus grand nombre de mouvements tournants ayant peu d'étendue et passant sur cette région à diverses latitudes. Malgré cette différence entre les vents du printemps et ceux de l'hiver, le transport général de l'air avait, ainsi que nous l'avons reconnu, à peu près la même direction pendant les deux saisons. Seulement, pendant les mois de février et de mars, une tendance marquée du N. au S. s'est manifestée dans la marche de l'atmosphère au-dessus de toute l'Europe.

La direction des vents s'est plus modifiée dans le bassin oriental; le N. est devenu plus fréquent dans l'Archipel grec. Au S. de l'Archipel, le vent est assez variable; l'O. domine cependant encore et l'on voit aussi en ces mêmes lieux le S. alterner avec le N.

Sur la mer Noire, le N.-E. est le plus fréquent; puis ce sont le S.-E. et le S.-O., ce qui concorde avec le passage de bourrasques au N. et au S. de ce point dans son voisinage.

Le remous dû à l'Espagne est encore très-apparent; les vents d'E. dominent toujours au détroit de Gibraltar et ils sont forts; cependant le N., le S.-O. et le N.-E. sont les plus fréquents sur la côte occidentale de la Péninsule, à Lisbonne par exemple. Il est à remarquer que près d'Oran l'O. a repris son empire, comme fréquence et comme force, c'est-à-dire qu'à Oran l'influence des plateaux espagnols sur la circulation de l'air est devenue presque insensible.

Circulation pendant l'été de 1865. — Le N.-O. domine toujours sur les côtes du Languedoc; les vents sont de directions assez variables sur le golfe de Gênes, la mer Tyrrhénienne et l'Adriatique; cependant l'E. est le plus fréquent sur la côte orientale de cette mer, tandis que les brises d'entre S.-O. et N.-E. par N.-O. sont les plus nombreuses à Livourne et celles des régions N.-O. ou N.-E. à Rome, Naples et

Palerme. Les vents qui soufflent surtout sur l'Algérie orientale sont d'entre E. et O. par N; ils passent à l'E. et au S. sur la province d'Oran. Ce sont les mêmes vents qui règnent sur les côtes d'Espagne, de Barcelone à Cadix, tandis que le N.-O. et le N.-E. l'emportent sur les côtes du Portugal où le S. est devenu beaucoup moins fréquent. Le remous dû à l'Espagne est très-apparent; les vents des régions N. reprennent leur fréquence à l'E. et au S. des Baléares.

Les courants d'entre N. et E. sont les plus habituels dans le bassin oriental et sur la mer Noire, puis viennent ceux du S. Ils cèdent la place à ceux de S.-O et de N.-O. au S. de l'Asie-Mineure et sur les côtes de Syrie.

Quels sont les vents forts? Des régions N. sur les côtes du Portugal, ils sont d'entre N.-E. et S.-E. ou S. du détroit de Gibraltar à Alger et aux Baléares, assez variables de Barcelone à Palerme et à Naples avec une tendance marquée à N.-O. ou S.-O. On les voit presque toujours de N.-O. sur les côtes du Languedoc et de la Provence, des régions O. sur les côtes d'Italie, de Livourne à Naples, variables entre S.-E. et N.-O. par N.-E. dans le S. de l'Adriatique, d'E. dans le N. et de N.-E. ou E. passant souvent aussi à N.-O. et S.-O. dans le golfe de Gênes.

Les vents forts tournent souvent au N. dans cette saison dans le bassin oriental, sauf dans la partie comprise entre l'Asie-Mineure, la Syrie et l'Égypte; ils restent de l'O. dans cette région. La mer Noire est soumise au même régime que l'Archipel. Seulement, il est à remarquer que, si les vents de N. dominent, les vents de S. sont après eux les plus fréquents. Ces vents forts ou même modérés des régions N., d'une assez grande constance pendant l'été et une partie de l'automne, sont les *étésiens* dont parle Aristote.

Pendant cette saison, les mouvements tournants passent en grand nombre à la surface de l'Europe, et leur cercle d'action est peu étendu; on doit en conclure qu'ils se forment près des régions où nous pouvons les suivre. Ils sont accompagnés d'orages. Ils passent pendant presque tout le mois de juin au N. de l'Europe, sévissant sur la Scandinavie, la Baltique et la Russie; les vents auxquels ils donnent naissance dans ces parages sont assez variables, cependant le N.-O. et le N.-E. variant au S. par l'O. dominent.

Le calme règne sur les Iles-Britanniques, la France, l'Allemagne, l'Italie et l'Espagne; seulement, des orages traversent le midi de l'Europe et la France. Les vents d'entre N. et E. ou S.-E. exercent généralement leur empire dans le midi, laissant souvent la place dans les golfes du Lion et de Gênes à des vents d'entre N. et O. ou S.-O. accompagnés d'orages. Des bourrasques passent sur l'Atlantique entre les Açores et le Portugal. Elles descendent sur le Maroc ou l'Algérie, ou, plus au S., sur le Sahara. Les vents des régions E. sur la péninsule Hispanique et les parties voisines de la Méditerranée en sont la conséquence. De plus, les alizés s'étendent sur l'Atlantique jusqu'à la hauteur du Portugal, et, ne pouvant s'alimenter librement par l'Espagne, ils le font par le détroit de Gibraltar et la Méditerranée.

La carte résumée d'Europe pour le mois de juin explique les vents persistants de N. observés sur le bassin oriental et la mer Noire et leurs alternances avec le S.; le second souffle avant, le premier pendant et après le passage des bourrasques sur la Russie orientale et la mer Caspienne. Les cartes journalières de l'Europe montrent que petit à petit l'O. étend son empire sur la mer du Nord et l'Allemagne, que le vent tourne vers S.-O. ou S. sur l'Écosse et l'Irlande, et que la région de beau temps, entamée par le N. et l'E., se confine vers la fin du mois sur la France, l'Espagne et l'Italie. Enfin les vents de S.-O. prennent de la force sur les côtes occidentales de France et d'Espagne, et on voit apparaître sur tout l'O. de l'Europe une dépression barométrique; cette dépression marchant vers l'E., une bourrasque arrive et occupe le 30 juin toute la surface de l'Europe. Son centre est vers la Manche, et son action s'étend de Lisbonne à Palerme, à Odessa et au golfe de Bothnie. La bourrasque traverse l'Europe de l'O. à l'E.; son centre arrive le 2 juillet près de Kiew (Russie). Des tourmentes agitent cependant encore l'Europe occidentale, donnant sur le N. de la France de forts vents d'entre N. et O., du mistral sur les côtes du Languedoc et de la Provence, et des coups de vent d'O. sur l'Italie méridionale. La rotation a lieu dans l'anse alpine pendant que de forts vents soufflent d'O. à Vienne (Autriche) et de S. dans la mer Noire. Le N. et l'E. règnent sur la Baltique méridionale; ils y ont moins de force. Il y a donc à proprement parler trois mouvements tournants sur l'Europe. Le calme

revient pour quelque temps sur le centre du continent. Une bourrasque de peu d'étendue se montre le 6 sur le golfe de Gascogne; son centre passe le 7 sur l'Angleterre, répandant à profusion les orages de Bilbao à Paris, Bruxelles et Londres pendant la nuit du 6 au 7 et pendant la journée du 7. Les orages éclatent à Stockholm pendant la nuit du 7 au 8, et ils se continuent le 8 avec de forts coups de vent tournant de S. à O. Des mouvements moins étendus encore sont passés sur la Méditerranée avec leur cortége habituel de pluies et d'orages; les abords des Alpes sont calmes et le baromètre y reste haut.

Les tourbillons tournent pendant cette période autour du massif montagneux, où l'air peu agité ne subit qu'un contre-coup éloigné des tourmentes qui passent dans le voisinage; les centres de ces dernières passent sur les Iles-Britanniques à une latitude plus ou moins élevée et se dirigent de là vers la Suède et la Russie qu'elles franchissent du N.-O. au S.-E. Dans d'autres cas elles s'engouffrent dans le canal laissé entre les Alpes Helvétiques et les Alpes Scandinaves et descendent sur la mer Noire.

La France est dans tous les cas au S. de la trajectoire du centre; les vents d'entre S.-E. et S. O. ou O. y dominent; il faut aussi attribuer à la même cause les fréquents orages qui éclatent sur notre pays, principalement au N. L'Italie et l'Adriatique, abritées par les Alpes, jouissent du calme et du beau temps, le mistral souffle sur les côtes méditerranéennes de France avec des vents d'entre N. et E. sur l'Espagne orientale; des orages peu étendus passent sur ces régions de l'O. à l'E. et y causent une agitation passagère, pendant que le versant septentrional des Alpes et des Pyrénées, la Baltique et la Russie sont le théâtre de violents orages. Ces météores envahissent petit à petit la Suisse, le Tyrol, la haute Italie, et éclatent le 19 au soir sur l'Adriatique; la carte du 20 au matin montre un mouvement tournant établi sur cette partie de l'Europe.

Les courants occidentaux continuent à empiéter sur les régions calmes, et le 20 juillet, des orages se dirigeant vers l'E., traversent l'Espagne. Ils traversent, le 21, la Méditerranée occidentale, et ils sévissent, du 21 au 22, sur l'Italie. Les vents à leur approche varient comme nous l'avons déjà vu tant de fois; de l'E. ils tournent au S., puis à l'O., où ils prennent de la force sur la mer Tyrrhénienne, tandis qu'ils sont

encore de l'E. sur l'Adriatique. Ils se calment dès le lendemain, et le beau temps revient sur l'Europe occidentale. L'E. est traversé par des bourrasques qui, d'abord confinées dans les régions polaires et le voisinage de l'Oural, se rapprochent de nous en s'abaissant vers le S. et diminuant l'amplitude de leur course vers l'E. Des tourmentes passent également entre les Açores et l'Espagne; les vents d'entre E. et S. s'établissent sur la péninsule ; l'Italie est calme.

L'empiétement des courants d'O. continue pendant les premiers jours d'août; une série de bourrasques passent du 1er au 9 dans la vallée européenne pour disparaître entre le Caucase et l'Oural. Quelques mouvements tournants traversent en même temps l'Espagne, l'Italie et les provinces danubiennes. Un tourbillon plus étendu que les autres aborde le 11 l'Irlande où l'on voit son centre. Étendant son influence du S. de l'Espagne à la Norwége, il donne les jours suivants de mauvais temps au N. et au S. des Alpes, sur les provinces danubiennes, la mer Noire et la Russie méridionale ; les orages continuent d'éclater sur ces régions. Pendant presque tout le mois, l'Europe centrale est sur le trajet de bourrasques continuelles ; il en résulte une série de mauvais temps sur l'Irlande, l'Angleterre, la France, les Pays-Bas, l'Allemagne et le S. de la Russie. Des mouvements moins étendus traversent en petit nombre la Méditerranée.

Circulation pendant l'automne de 1865. — Un changement notable se montre dans la distribution des vents sur le bassin occidental : le N.-O. cesse de dominer sur les côtes de France ; le S. et le S.-E. lui ont succédé; l'E.-N.-E. règne sur les parties septentrionale et occidentale du golfe de Gênes, l'E. sur la vallée du Pô et l'Adriatique septentrionale; plus au S. on rencontre le S.-E. près de la Dalmatie, puis des vents de S. et de N. sur la mer Tyrrhénienne, de S. et d'O. à Livourne.

Les vents sont forts d'entre S.-O. et N.-O. sur l'Algérie et dans le voisinage, d'entre S.-E. et S.-O. ou O., mais surtout de ces deux dernières directions près des Baléares, enfin sur les côtes d'Espagne des régions O. tournant de plus en plus à N. ou N.-E. à mesure qu'on avance vers le S., pour être presque uniquement d'E. et d'O. au détroit.

Le bassin oriental a pendant cette saison une circulation très-accen-

tuée; le N. domine sans contestation dans l'Archipel, à Constantinople et sur la mer Noire; il est aussi très-fréquent entre l'Asie-Mineure, le Liban et l'Égypte; les vents forts paraissent cependant être surtout de S.-O. à Beyrouth et l'on remarque un remous d'air au S. de l'Asie-Mineure; les vents d'entre O. et S. y sont dominants.

Les vents de toute intensité présentent le même caractère général dans leur distribution, si l'on ne tient pas compte d'une variabilité un peu plus grande due à l'influence des localités.

Nous allons voir que cette distribution se relie directement avec les trajectoires des bourrasques qui ont traversé l'Europe durant cette saison. Nous avons laissé à la fin d'août l'Europe assez calme; les bourrasques passaient au N. de la Scandinavie et redescendaient sur la Russie septentrionale, l'Oural et la Sibérie. Leurs trajectoires continuent à avoir une grande amplitude pendant les premiers jours de septembre; puis elles s'infléchissent plus brusquement vers le S.; les 15, 16, 17, 18 et 19 elles traversent la Russie du N.-O. au S.-E. en descendant vers le Caucase et l'Asie-Mineure. Le calme a été peu troublé dans le reste de l'Europe; le 12, un mouvement tournant se montrait sur le golfe de Gascogne; il arrivait le 13 sur la Méditerranée par l'isthme pyrénéen et passait le 14 sur le bassin oriental pour disparaître sur l'Afrique.

Les vents étaient jusqu'alors restés peu forts sur le S. de l'Europe, sauf dans le voisinage du détroit de Gibraltar; ils avaient dans ces régions souvent beaucoup de violence de l'E.; ils atteignent la même vitesse sur le golfe de Gênes, l'Italie et l'Adriatique. Ce mouvement marche vers l'E. et le vent ne tarde pas à tourner de l'E. vers le N. sur l'Italie en diminuant de force. Pendant ce temps le baromètre est resté haut sur l'Angleterre, le N. de la France et l'Europe centrale. Les trajectoires des bourrasques se rapprochent de nous à l'O.; une baisse barométrique se fait sentir d'abord sur les Iles-Britanniques avec un tour du vent à S. et S.-O.; le baromètre remonte et le vent tourne vers O. et N.-O.; le calme règne, le baromètre baisse de nouveau et une bourrasque aborde le 20 notre continent à la latitude d'Édimbourg; les Alpes Scandinaves la partagent; une partie monte le long des côtes de Norwége jusqu'à la mer Glaciale, l'autre traverse l'Europe centrale les 21, 22, 23 septembre, étendant son action à peu de distance de son centre et produisant seulement quelques coups de vent et des orages sur la

France, l'Allemagne et l'Autriche; quelques mouvements orageux passent en même temps du golfe de Gascogne sur la Méditerranée par l'isthme pyrénéen, les 22 et 23; ces orages sont ressentis sur le midi de la France, l'Espagne, l'Algérie et l'Italie méridionale. L'Europe rentre ensuite dans le calme; les mouvements tournants n'atteignent que le N., et le 28 seulement quelques orages éclatent en Italie. Ce mois est donc remarquable parce qu'il a été pour une grande partie de notre continent une période de calme à peine interrompue par quelques orages.

Le mois d'octobre commence par l'arrivée d'une bourrasque sur le S.-O. de l'Europe; le calme et de fortes pressions barométriques règnent sur la Scandinavie et la Baltique; la bourrasque passe au S. des Alpes et donne sur le golfe de Gênes et l'Adriatique des vents des régions E. Les fortes pressions sont entamées dès les premiers jours du mois par le N.; des bourrasques passent vers les Féroë, et quelques jours après elles traversent les Iles-Britanniques, l'Allemagne et la Russie, à peu près de l'O. à l'E. Quelques-unes ayant leurs centres plus au S. près du golfe de Gascogne donnent des orages sur le midi de l'Europe. Les vents sont généralement d'O. ou de N.-O. sur l'Espagne, assez variables sur l'Italie. Cette situation dure jusqu'au milieu du mois; le calme s'établit pour peu de jours sur la Méditerranée, tandis que des bourrasques passent toujours sur la Manche, la mer du Nord et la Baltique; le 17, l'un de ces météores descend de l'Irlande sur la France; son centre arrive le 18 près de Nantes, puis il remonte vers le N.-E. et parcourt les Pays-Bas, l'Allemagne, la Prusse et la Russie méridionale; l'action s'en étend le 19 sur presque toute l'Europe; de forts vents d'entre S.-E. et S.-O. ou O. soufflent sur la Méditerranée.

Après un calme d'un jour ou deux, de fortes bourrasques passent sur l'Europe; leurs centres parcourent notre continent de l'O. à l'E. à la latitude de l'Angleterre; leur action s'étend jusque sur l'Espagne. Il en résulte pour cette contrée, la Méditerranée et l'Italie, de forts vents d'entre S.-E. et S.-O. ou O. jusqu'à la fin du mois.

La circulation atmosphérique est encore plus accidentée pendant le mois de novembre, ainsi que le montre la carte d'ensemble. Une tourmente passe au commencement du mois du golfe de Gascogne sur l'Italie et l'Égypte; les vents sont de l'E. sur le N. de la Méditerranée, de l'O.

sur le S.; le calme revient pour plusieurs jours. Le 8, une nouvelle tourmente suit les précédentes; les vents sont d'E. sur les côtes de Provence, d'O. sur le golfe du Lion et les côtes d'Espagne; la Suède et la Baltique sont sur le passage des bourrasques; elles descendent sur la Russie vers la Caspienne ou l'Oural. Le calme règne sur le S. et l'O. de l'Europe; il continue jusqu'au 14, jour où une bourrasque commence à faire sentir son action sur les Iles-Britanniques et la Manche pour continuer sa route vers le N.-E. Une assez forte bourrasque a son centre, le 17, près des Féroë. Elle traverse l'Europe du N.-O. au S.-E. Une autre apparaît le 22 à l'O. de l'Écosse; elle descend un peu vers le S., pour remonter sur la Scandinavie et la Baltique; la Méditerranée en ressent l'influence; le N.-E. souffle en Provence, les vents des régions E. sur l'Italie et l'Adriatique. Les jours suivants, de fortes bourrasques s'approchent de nos côtes; bien que les Alpes protégent un peu l'Italie en empêchant le mouvement rapide de l'air, ce dernier y a cependant une direction générale du S.; sa vitesse dans ce sens est grande sur le golfe du Lion, et le vent y incline à l'E. Les bourrasques continuent de traverser l'Europe et donnent en passant des vents violents de S.-O. sur toute la partie occidentale de ce continent. Le calme règne sur le midi; une bourrasque, qui aborde le golfe de Gascogne et passe en partie sur la Méditerranée, trouble cet état à la fin du mois; sous son influence, des grains d'entre S.-E. et S.-O. passent de l'O. à l'E. sur l'Italie septentrionale et l'Adriatique.

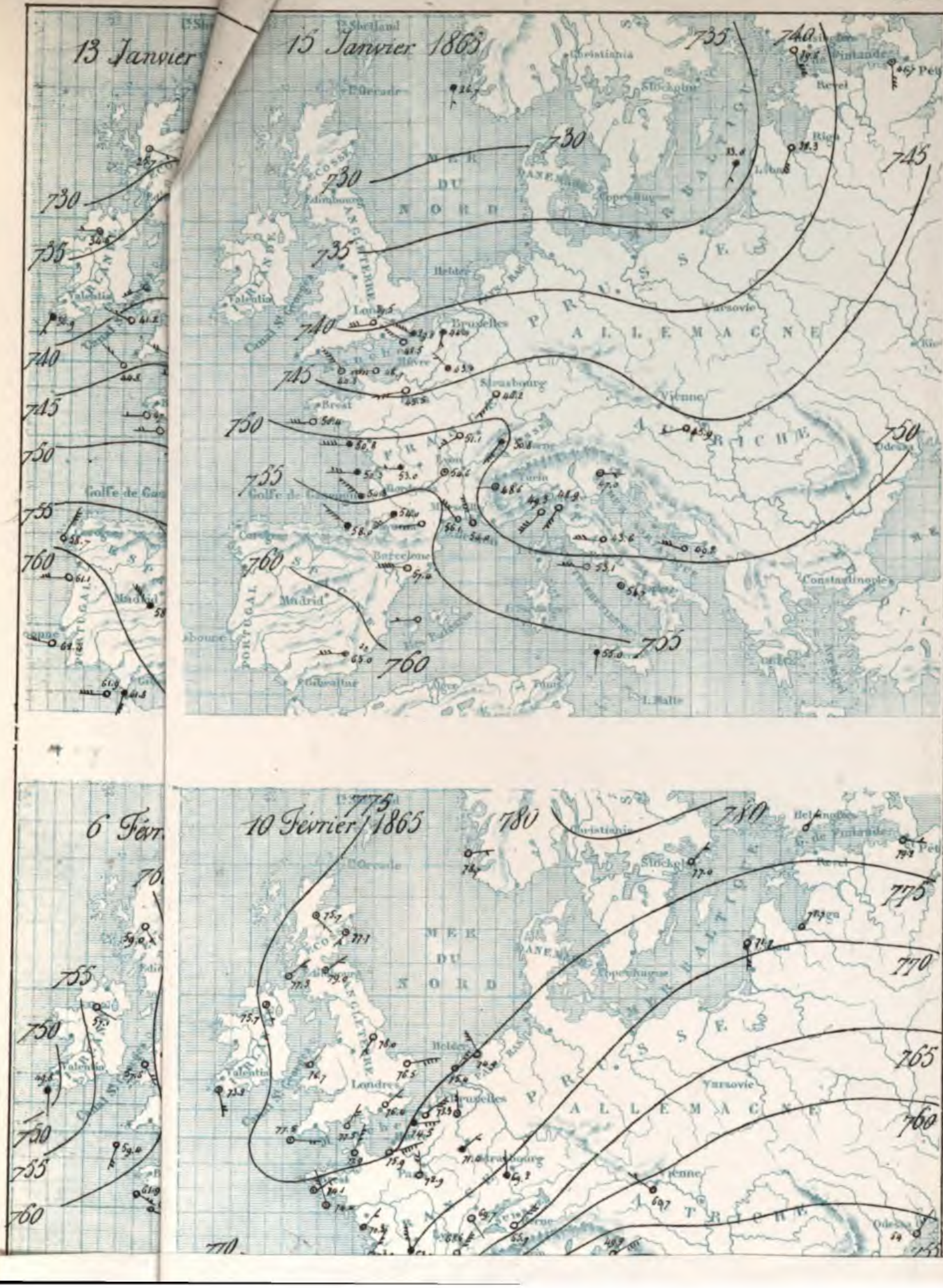
Résumé de la marche des courants généraux en 1865. — En résumé, pendant toute l'année 1865 les courants généraux ont été en moyenne dirigés de l'O. à l'E. Les bourrasques qu'ils entraînent nous ont permis de les suivre. Elles viennent toutes de l'Atlantique, passent sur l'Europe en suivant des trajectoires dont les directions varient d'O.-S.-O. — E.-N.-E. à O.-N.-O. — E.-S.-E., et s'inclinent peu à peu vers le S. à mesure qu'elles s'éloignent davantage de leur point originel.

Deux causes règlent le déplacement du lit des bourrasques : 1° la variation de leur point originel; 2° la variation de la zone d'aspiration.

Nous ne pouvons dans ce court travail étudier l'influence de ces deux causes; nous sortirions, du reste, des limites que nous avons dû nous imposer.


Été. – Vents et pluie.
300
500
500
589
300
200
100
20
136
100
2
en millimètres la hauteur moyenne de la
dant la saison. – Cette moyenne est déduite
servations.

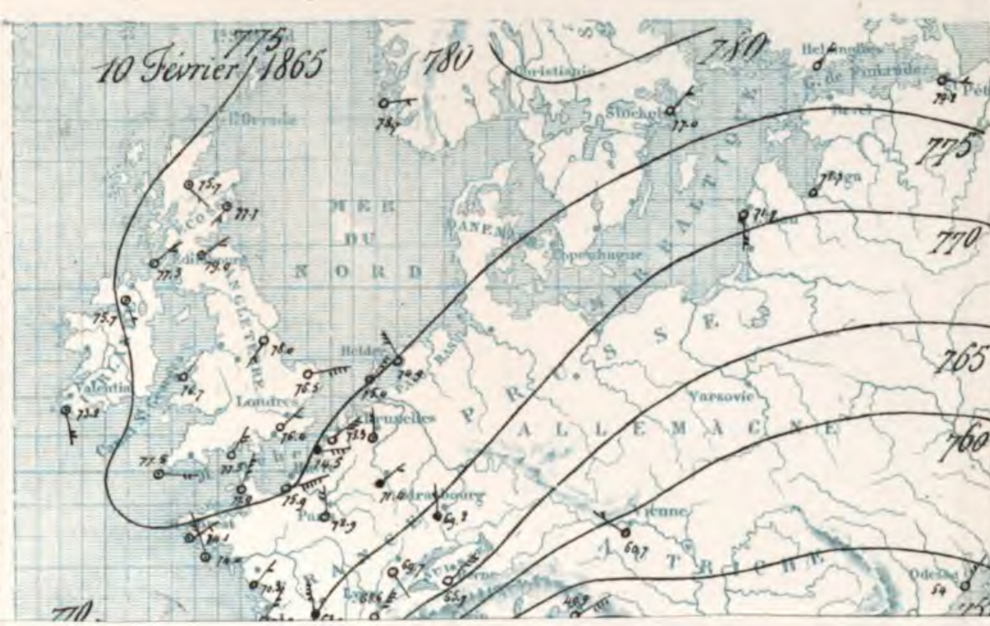

Été. – Vents et pluie.
300
500
500
589
300
200
100
20
136
100
2
en millimètres la hauteur moyenne de la
dant la saison. – Cette moyenne est déduite
servations.


13 Janvier
15 Janvier 1865
6 Févr
10 Février 1865
MER DU NORD
ANGLETERRE
ÉCOSSE
IRLANDE
FRANCE
PRUSSE
ALLEMAGNE
AUTRICHE
PORTUGAL
Golfe de Gascogne
Canal St George
Londres
Bruxelles
Strasbourg
Vienne
Madrid
Barcelone
Gibraltar
Christiania
Stockholm
Copenhague
Riga
Varsovie
Odessa
Constantinople
Helder
Brest
Valentia
Lyon
Turin
Havre
730
735
740
745
750
755
760
765
770
775
780


13 Janvier
730
735
740
745
750
755
760
Valentia
Golfe de Gascogne
PORTUGAL
Madrid


15 Janvier 1865
Shetland
Christiania
Stockholm
Revel
Riga
MER DU NORD
ECOSSE
Edimbourg
ANGLETERRE
IRLANDE
Valentia
Londres
Bruxelles
Havre
Brest
Strasbourg
Vienne
Varsovie
PRUSSE
ALLEMAGNE
AUTRICHE
Odessa
Turin
Golfe de Gascogne
Bordeaux
Corogne
Barcelone
Madrid
PORTUGAL
Lisbonne
Gibraltar
Constantinople
730
735
740
745
750
755
760


6 Févr
750
755
760
Valentia


10 Février 1865
775
780
770
765
760
Christiania
Stockholm
Helsingfors
Revel
Riga
MER DU NORD
Copenhague
Valentia
Londres
Bruxelles
Strasbourg
Vienne
Varsovie
PRUSSE
ALLEMAGNE
Odessa

Nous signalerons seulement en quelques mots, par des considérations très-simples, l'intérêt qu'il y a à étudier la dernière.

L'air est appelé vers l'équateur thermique de tous les points voisins; cette zone joue le rôle d'une plaque chauffée plus que les corps environnants ; au-dessus d'elle l'air a un mouvement ascendant et il en afflue de tous les environs pour remplir le vide produit. L'équateur thermique se déplace en suivant le soleil ; la zone d'aspiration se déplace. M. Marié-Davy a, dans un ouvrage publié récemment, expliqué très-clairement comment il y a pendant une moitié de l'année un excès d'air dans un hémisphère, tandis qu'il y a excès dans l'hémisphère opposé pendant l'autre moitié de l'année ; je ne reviens pas sur le fait de cette double pulsation annuelle de la grande machine atmosphérique.

Tous les points de l'équateur thermique ne sont pas également échauffés. Il en résulte que les courants de retour qui entraînent nos bourrasques ne se dirigeront pas indifféremment vers un point ou l'autre de cette zone, mais vers le point le plus échauffé, à moins que des obstacles physiques, tels que de hautes chaînes de montagnes, des mers moins échauffées, ou même leur vitesse acquise, ne les en empêchent; dans tous les cas, une déviation appréciable de ces courants devra suivre un déplacement du point le plus chaud de l'équateur thermique.

En hiver, les bourrasques passent généralement, soit tout à fait au N. de l'Europe, cas où elles sont entraînées vers l'E. en suivant le courant marin chaud au N. de l'Asie, soit sur la Russie en descendant sur la Caspienne et la Perse.

Au mois de mars, nous voyons un changement brusque dans leur direction ; elles ont une grande tendance à marcher du N. au S. et donnent sur une partie de l'Europe des vents violents des régions N. Cette tendance, encore sensible dans le mois d'avril, l'est moins qu'en mars, et plus de bourrasques inclinent leurs trajectoires vers le S.-E. ou l'E.-S.-E. La marche régulière vers l'E. a presque complétement repris en mai pour se continuer en juin. Pendant cette partie de l'année, le soleil s'élevant au-dessus de l'équateur terrestre échauffe d'abord l'Afrique, où se fait surtout l'aspiration ; les terres asiatiques, à une latitude plus élevée, ne s'échauffent que plus tard. Le maximum de la

température annuelle est atteint à Kouka (Soudan) dès le mois d'avril, et cette température est beaucoup plus élevée alors que celle de Calcutta. Le maximum arrive dans cette dernière ville dans le courant de mai; à Kouka, la température, à partir d'avril, décroît plus vite qu'à Calcutta; les deux températures sont égales en juillet.

L'aspiration doit donc se faire pendant le printemps vers l'Afrique, ce qui donne aux bourrasques leur direction du N. au S.; l'Asie s'échauffant, l'aspiration se déplace et ramène en été les courants d'Europe à leur direction normale.

L'aspiration continue pendant l'été à se faire sur le continent asiatique, mais elle y diminue rapidement, tandis qu'elle perd peu de son intensité en Afrique; en automne, l'aspiration doit produire un effet analogue à celui du printemps. On l'observe, mais moins marqué; la cause de cette différence est visible dans les courbes de température ci-jointes; les températures de l'année ne sont pas distribuées symétriquement par rapport à un certain mois; il y a deux *maxima*, le second plus faible que le premier. La cause de cette différence doit être cherchée dans ces courants de retour eux-mêmes qui, une fois produits, tendent à diminuer la température de la zone tropicale.

CHAPITRE IV.

DES VENTS EN GÉNÉRAL DANS LA MÉDITERRANÉE. — CONCLUSIONS RELATIVES AUX COURANTS ATMOSPHÉRIQUES DE CETTE MER TIRÉES D'APRÈS LES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES.

La comparaison entre les vents observés en 1865 et les trajectoires des bourrasques nous a mis en mesure de renverser la question et d'examiner les roses mensuelles résultant d'un grand nombre d'années, pour en conclure le passage de certains courants généraux et les modifications que leur font subir les circonstances locales. Les cartes des pluies que nous avons dressées pour les quatre saisons viendront corroborer nos conclusions.

Les directions moyennes des vents à Marseille ont été obtenues au moyen d'observations faites pendant vingt années, de 1841 à 1860. Ces documents calculés et réduits en tableau ont été envoyés à l'Observatoire impérial de Paris par M. Voigt, alors directeur de l'Observatoire de Marseille. Les observations ont été faites six fois par jour, Le N.-O. l'emporte de beaucoup sur les autres vents; c'est le mistral (en patois provençal, *magistraou,* maître vent), si connu sur le littoral français de la Méditerranée. En hiver, il n'alterne guère qu'avec l'E. et le S.-E. beaucoup moins fréquents que lui; l'O., le S.-O. et le N.-E. sont plus rares encore. A mesure qu'on avance vers l'été, le N.-O., tout en restant dominant, cède en partie la place à l'O, au S.-O. et au S.-E., puis reprend peu à peu son empire pour régner pendant l'hiver. Le S.-E. présente une circonstance remarquable; il a deux *maxima*, l'un au printemps, l'autre à l'automne. Les vents forts sont presque uniquement le N.-O. et le S.-E.; le premier n'a qu'un maximum pendant l'hiver, le second en a deux, en mai et en septembre et octobre. Quelques vents forts d'O. et d'E. se mélangent aux deux premiers.

Explication du mistral. — On a longtemps ignoré la cause du mistral, célèbre par sa violence et quelquefois par sa longue durée. On l'a attribué à un refroidissement subit du vent passant sur les Pyrénées ou les Alpes. M. Marié-Davy, dans plusieurs Notes publiées au *Bulletin de l'Observatoire impérial*, en juin 1864, montre que la cause de ce vent n'est pas locale et que les mouvements qui lui donnent naissance se transportent vers l'E. comme les bourrasques.

M. Kaemtz, dans une communication faite à l'Institut, en juillet 1865, et insérée au *Bulletin de l'Observatoire impérial*, le 13 de ce mois, montre par un tableau de pressions barométriques sur la France, l'Espagne et l'Italie, avant, pendant et après le mistral, que c'est une véritable tempête venant de loin, et qu'il n'est pas dû à un refroidissement subit du vent passant sur les Pyrénées ou sur les Alpes.

Il est remarquable qu'à mesure que les études météorologiques font des progrès, on apprend à ne plus chercher les causes de la plupart des phénomènes dans les localités où ils sont observés, mais à les rattacher tous à des causes générales prépondérantes, auxquelles sont subordonnées les circonstances locales.

On peut considérer dès aujourd'hui comme un axiome en météorologie la pensée exprimée par M. Marié-Davy dans le *Bulletin de l'Observatoire impérial* du 21 juin 1864 :

« De petites causes, sans doute, peuvent produire de grands effets; mais la nature procède en général à plus grands traits. Ce qu'il nous est essentiel de connaître, ce sont les mouvements généraux de l'atmosphère; eux seuls peuvent nous permettre de trouver la juste interprétation des faits de détail. En procédant autrement, on s'expose à créer autant de météorologies distinctes qu'il y a de régions différentes à la surface du globe. »

Or, si l'on se reporte à l'examen de 1865 fait plus haut, on y trouve l'explication des vents de N.-O., de S.-E., de S., d'E. et d'O. qui soufflent fort aux diverses époques de l'année dans ces parages.

Toutes les fois que le mistral souffle, il y a un excès de pression atmosphérique à l'O. du golfe du Lion. Quelle que soit l'origine de cette pression, elle accompagne en toute saison le mistral.

Examinons en détail l'état atmosphérique de l'Europe à différentes époques de l'année 1865. Les cartes ci-jointes permettront de suivre facilement nos explications.

Le 13 janvier (voir *Pl. IV*), une forte bourrasque a son centre sur le N. des Iles-Britanniques; le mauvais temps s'étend de la Norwége au S. de l'Espagne ; il gagne l'Italie, où les vents ne sont pas encore forts; la pression de l'air sur cette dernière région est plus forte que sur la France; aussi le vent est-il fort du S. dans le golfe du Lion; il est en même temps fort d'entre S.-O. et N.-O. sur la France et l'Espagne. Le mouvement atmosphérique se transporte vers l'E.; le centre est le lendemain matin sur la mer du Nord ; nous voyons les vents tourner rapidement à O.-S.-O. et O. sur les côtes méditerranéennes de France, pendant qu'ils atteignent sur la France occidentale une violence extraordinaire de cette direction. Le S.-O. est devenu fort dans le golfe de Gênes et le S.-E. dans le S. de l'Italie. La rotation continue et le N.-O. souffle fort le lendemain 15 sur les côtes de Provence; la dépression barométrique franchissant les Alpes est parvenue sur l'Autriche, les Provinces Danubiennes et l'Adriatique. Une seconde dépression barométrique suit la première, et déjà le vent retourne à l'O. sur le golfe du Lion, tandis qu'il est de N.-O. à Marseille et de N.-N.-O. à Toulon.

Le 6 février de la même année (voir *Pl. IV*), une bourrasque a son centre le matin sur la mer Tyrrhénienne, une autre à l'O. de l'Irlande. Entre ces deux mouvements tournants l'air est calme et le baromètre haut. Il est bas sur l'Italie et l'Adriatique; le mistral souffle sur le golfe du Lion; le N.-O. souffle aussi sur l'Espagne, le N.-E. sur la Toscane et l'E.-N.-E. ou Bora à Trieste; Rome et Naples ressentent encore le S. La bourrasque du S. s'éloigne vers la Grèce; les pressions s'égalisent, le N.-O. perd sa force; cependant les vents d'entre E. et N. restent violents le 8 en beaucoup de points de l'Italie et de l'Adriatique soumises encore à l'action de la bourrasque. Le tourbillon qui arrivait sur l'Irlande a, le 8, son centre sur les Pays-Bas; il continue d'abord sa marche vers l'E., puis il descend vers le S.-E., et son centre arrive le 10 sur les provinces danubiennes; le baromètre a monté très-haut sur le N. et l'O. de l'Europe; il est bas au S. et à l'E. Les vents d'entre N. et E. ont partout une très-grande force, le mistral devient violent, le Bora souffle à Trieste, et l'Italie est balayée par des vents d'entre E. et N. qui soufflent en tempête.

Le N.-O. et le N. sont faibles le 19 février au matin (voir *Pl. V*) sur les côtes méditerranéennes de France; une bourrasque a son centre sur la mer du Nord et se dirige vers la Baltique et la Russie. Son influence se fait sentir sur la France océanienne par des vents forts d'entre S.-O. et N.-O. Les vents sont faibles sur l'Italie et leurs directions y sont très-variables; enfin, de fortes brises d'entre N. et E. soufflent sur le S. de l'Espagne. La bourrasque marchant vers le S.-E., le baromètre, d'abord assez haut sur l'E. et le S. de l'Europe, baisse, tandis qu'il monte sur l'O. Le N.-O. augmente de force; il est très-fort le 21, jour où des vents de N. règnent sur toute la France. Les fortes pressions s'établissent sur le N.-O. de l'Europe et le mistral ne diminue de violence que dans les derniers jours du mois. Une nouvelle bourrasque arrive sur les Iles-Britanniques, et le vent tourne à l'O. le 28. La bourrasque a son centre sur l'Écosse et commence à envahir la France. Le calme règne sur l'Italie.

En toute saison le mistral se produit dans les mêmes conditions. Examinons deux cas de mistral pendant l'été.

Le 24 juin (voir *Pl. V*), de fortes pressions barométriques se mon-

... sur le N.-O. de l'Europe, le baromètre indique 771 millimètres ... pression à Valentia (Irlande), et 761 millimètres à Palerme.

Le N.-O. souffle assez fort à Cette ; le vent est presque nul sur la Provence, l'Italie et l'Espagne. Le 25, la pression a augmenté sur la France et sur l'Italie, plus cependant sur la première. Elle était de 766 millimètres à Brest le 24 et de 761 millimètres à Palerme ; elle est, le 25, de 770 millimètres à Brest et de 762 millimètres à Palerme. Le mistral s'est propagé jusqu'à Marseille ; le vent est, le 25 au matin, presque nul du N.-O. à Toulon, modéré à Marseille et assez fort à Cette. La hausse continue sur l'Italie, et la baisse sur la France ; le vent est, le 26, faible d'O. à Cette, modéré du N. à Marseille et assez fort de N.-N.-E à Antibes.

Les trois jours que nous venons d'examiner sont une période de calme pour le S.-O. de l'Europe.

Le 29 juin (voir *Pl. VI*), une bourrasque aborde l'Europe ; elle passe sur l'Europe centrale ; le vent, nul le 29 sur le bassin méditerranéen, sauf à Alicante où il est fort de N.-O., a pris de la force le lendemain 30 sur tout le bassin occidental ; le N.-O. souffle sur le Languedoc et la Provence occidentale, le S.-O. à Antibes et sur le golfe de Gênes, le N.-O. sur l'Espagne. La bourrasque se transportant vers l'E., le baromètre remonte sur la France ; le N.-O. augmente de force sur le Languedoc.

Le mistral exige donc pour sa production, quelle que soit la saison, les mêmes circonstances réunies. Que ce soit pendant une période de beau ou de mauvais temps pour le S.-O. de l'Europe, il faut toujours un excès de la pression de l'air à l'O. des Cévennes. Le mistral est un vent de poussée ; nous l'avons vu commencer à l'O. et finir à l'E. Dans certains cas, une bourrasque passant au N. du golfe du Lion, le mistral est un vent de tempête ordinaire ; dans tous les cas l'excès de pression signalé plus haut existe, mais, dans le cas d'une bourrasque, ce n'est qu'une circonstance concomitante et non une cause. La violence de ce vent est due à la forme de l'isthme pyrénéen. Dès que la direction générale du mouvement atmosphérique dépasse un peu l'O. vers le N., le plateau central et le massif des Alpes dévient le courant vers le golfe du Lion. Ce courant, rétréci entre les Alpes et les Pyrénées dans le sens de

la largeur, et par les Cévennes dans le sens vertical, constitue un *rapide* sur les côtes du Languedoc; de là une des causes de l'excès de pression sur le versant N.-O. des Cévennes et la diminution de pression sur la Méditerranée, là où le vent conserve une vitesse qui n'est plus en rapport avec la largeur du lit.

De là aussi la violence du vent du N. dans la vallée du Rhône entre les contre-forts des Alpes et ceux du plateau central.

De ce qui précède on peut conclure que, si le mistral doit ses qualités remarquables à des circonstances locales, sa première cause est liée à l'existence des courants généraux et des bourrasques, et qu'on peut l'annoncer comme un coup de vent ordinaire (*).

Les coups de vent de S.-E. qui arrivent aux équinoxes, les coups de vent d'E. de ces mêmes saisons s'expliquent de la même manière par le passage des bourrasques, et la disposition des pressions barométriques est, par suite, intimement liée à leur apparition. Les deux maxima du S. correspondent à des passages plus fréquents de bourrasques dans le voisinage du golfe du Lion au printemps et en automne. Une bourrasque a-t-elle son centre sur l'Espagne, le golfe de Gascogne ou la France, le S.-E. souffle dans le golfe du Lion pour se changer en S. puis en S.-O. Une bourrasque passe-t-elle sur le Portugal, l'Espagne, la Méditerranée et l'Italie, le vent est de S.-E., puis E., N.-E. et N.-O. sur le golfe du Lion. Il suffit de jeter les yeux sur les cartes résumées des différents mois en 1865 pour reconnaître la liaison entre ces deux maxima de S.-E. et le passage des bourrasques dans le golfe du Lion.

Le mistral est le vent le plus sec de ces parages, parce qu'il s'est asséché en passant sur les Cévennes; il est en effet pluvieux sur le versant N.-O. de ces montagnes: les vents des régions E. ou S. y amènent la pluie, parce que ce sont des vents marins sur les côtes et sur le versant S.-E. des Cévennes; ils sont secs sur le versant opposé.

Le régime des vents change promptement pour l'observateur qui de Marseille va dans le golfe de Gênes en suivant les côtes de France; O. et E. dominent sur les côtes de Provence vers Toulon, O. pendant les

(*) Une communication sur ce sujet a été faite à la Société Météorologique de France dans sa séance du 14 février 1866.

mois de mai, juin, juillet, août et septembre, E. surtout en octobre; il domine aussi en novembre, décembre et janvier.

Les brises de rivages, ou vents solaires, dominent de mai à la fin de septembre; elles doivent leur nom à ce qu'elles suivent le soleil dans sa marche. Si le vent d'O., par lequel elles se terminent le soir, dure pendant la nuit et le lendemain matin, il prend de la force dans la journée; c'est alors une dégénérescence du mistral ou la conséquence du passage d'une bourrasque au N. de la contrée.

Le N.-O. ou mistral souffle par bourrasques en été. Un fait curieux, c'est qu'il est modéré après une grande pluie et fort lorsqu'il succède à une petite pluie. Les nuages appelés *balles de coton* ou *cumuli*, l'accompagnent toujours et servent à annoncer son arrivée. Le mois d'août est parmi les mois d'été le plus fécond en coups de vent de cette région.

Il présente en général des caractères très-différents en hiver; sa violence et sa durée sont beaucoup plus considérables; dans cette saison il n'est plus produit par des mouvements d'air peu étendus, mais il se rattache à de fortes tempêtes dont le centre passe au N. des Alpes et qui occupent une très-grande étendue couvrant quelquefois presque toute l'Europe. La tempête passe-t-elle seulement sur les Iles-Britanniques, la France et l'Allemagne, son arrivée donne naissance à une compression de l'air contre les Alpes qui l'arrêtent dans son mouvement, et une partie se précipite dans la Méditerranée par le déversoir qui lui est fourni. Le N.-N.-O. prend de la force. La bourrasque marchant vers l'E.-S.-E., la partie où règne l'O. s'approche des Cévennes; le N.-N.-O. tourne à N.-O. et O.-N.-O.; la bourrasque passant, le vent retourne à N.-O. et à N. Si l'Espagne et le Portugal sont compris dans le cercle d'action du météore, le vent tourne de N. à O. et S.-O.; il est très-fort et devient terrible quand il retourne à O. et N.-O.; mais alors une tempête violente passe sur l'O. et le S. de l'Europe.

Je ne m'appesantis pas sur ce fait, que les nuages, marchant du N.-O. avec la forme de balles de coton annoncent l'arrivée d'un coup de vent de N.-O. Tout le monde comprend que, si un fluide se déverse par dessus un obstacle dans une masse du même fluide moins comprimée, il commencera à communiquer son mouvement aux couches les plus voisines, et seulement ensuite aux couches inférieures qui ne sont pas soumises directement à son action. Or, les courants d'O. rencontrent

dans l'isthme pyrénéen ces obstacles sous la forme de montagnes. Les Cévennes et les montagnes du plateau central leur barrent en partie l'entrée de la vallée du Rhône; les derniers contre-forts des Alpes et les monts de l'Estérel protégent enfin les côtes de Provence contre l'action immédiate de ces courants.

Lorsque des bourrasques ont leur centre sur la Méditerranée et qu'elles la traversent de l'O. à l'E., ou qu'elles y séjournent plusieurs jours, les vents tournent vers l'E. sur les côtes de Provence.

Tant que les vents d'E. sont faibles, le ciel reste clair; les nuages et la pluie suivent de près leur augmentation de force. Ils varient entre S.-E. et N.-E. pendant les gros temps; leur durée, égalant celle du passage des bourrasques au S. des Alpes, peut être fort longue; l'un d'eux a duré plus d'un mois, suivant l'amiral Bérard. On doit s'attendre à ces coups de vent surtout en décembre, janvier, février et mars, mauvaise saison de ces parages; ils alternent souvent avec les coups de vent des régions O. et soufflent avec une égale violence. Nous avons combattu l'explication du mistral par l'influence des condensations brusques de l'air ou de son refroidissement subit en passant sur de hautes chaînes de montagnes. Nous sommes loin de considérer cette influence comme nulle; seulement, parmi toutes les causes qui influent sur les phénomènes naturels, les unes sont plus générales; elles règlent l'ensemble des faits et les font tous concourir vers un but unique au milieu d'innombrables irrégularités apparentes; d'autres causes moins générales doivent être invoquées, sous la dépendance des premières, pour montrer la liaison de faits moins généraux, et l'on arrive, de proche en proche, à tenir compte ainsi de tous les agents naturels, en laissant à chacun d'eux son importance propre. Tel est l'esprit de toutes les méthodes propres à faire faire des progrès aux sciences d'observation.

Or, il arrive souvent que, s'il a plu ou s'il a neigé sur les montagnes voisines, les côtes de Provence ne ressentent pas l'effet des vents du large; ces derniers s'arrêtent à quelque distance du rivage, tandis qu'il souffle à terre de petites brises variables du N.-E. au N.-O. Le ciel est alors clair au zénith et l'horizon est chargé d'une masse de nuages fixes. Cet effet est dû aux courants froids descendant de la montagne, et la bande de nuages fixes est à la séparation des courants de montagne et des courants venus du large.

L'étude de toutes les circonstances locales de cette nature trouve sa place dans des monographies spéciales; les limites de ce travail ne nous permettent pas de les aborder. Si nous avons cité cet exemple, c'est pour montrer que nous ne méconnaissons pas l'influence des petites causes, mais que nous les subordonnons aux causes plus générales, qui sont les courants généraux et les bourrasques qu'ils entraînent.

Si nous descendons vers le S., nous verrons les vents dominants tourner le long des côtes d'Espagne de N.-O. à N. et N.-E. Les vents d'E, sont fréquents en été, c'est-à-dire en juin, juillet et août; en février, ce sont le N.-N.-O. et le N.-N.-E. qui dominent . Nous avons du reste vu la même chose sur les cartes de 1865.

Au lieu des coups de vent de N.-O. du golfe du Lion, on ressent aux Baléares des coups de vent de N. Ils ont une telle violence, qu'ils exercent une influence remarquable sur le versant septentrional de ces îles. Les plantes et les animaux y sont rachitiques, et l'espèce humaine elle-même ressent cette influence. Le versant méridional, au contraire, offre un aspect riant.

Ces coups de vent ne changent jamais leur direction pour le S., et lorsqu'on est surpris dans le voisinage de ces îles par un vent de N.-O. qui fait présager un coup de vent, les pilotes conseillent de s'abriter au S. des Baléares. L'existence de ces coups de vent est liée comme celle du mistral au passage de bourrasques dans le voisinage et quelquefois même à une grande distance. Seulement, nous n'admettons pas un rapport aussi direct entre ces vents et le mistral, que parait le faire l'amiral Bérard (*).

« Les coups de vent de N.-O., dit-il, qui se font sentir dans le golfe du Lion, arrivent à Mahon, après avoir changé leur direction au N. »

Les cartes étudiées plus haut pour déterminer les conditions dans lesquelles se produit le mistral montrent suffisamment que tantôt le mistral et le N. des Baléares souffleront ensemble ou successivement, ou que le mistral souffle sans que l'autre lui succède ni le précède. Ce qu'il y a de général, disons-le encore, c'est la bourrasque tournante.

(*) *Description nautique des côtes de l'Algérie,* par M. A. Bérard, capitaine de corvette. suivie de Notes par M. de Tessan, ingénieur hydrographe; 1837.

Les vents des régions N. règnent du reste pendant une grande partie de l'année de la Corse à l'Atlantique; les Baléares ne présentent pas plus que les côtes de France un phénomène dû à des causes locales. Les roses de vents de Lisbonne montrent en effet que le N. et le N.-N.-O. dominent pendant toute l'année sur les côtes du Portugal ; les vents les plus fréquents y sont ensuite ceux de S.-O. ou O.-S.-O.; ils présentent deux maxima en mai et juin, puis en septembre et octobre, c'est-à-dire aux mêmes époques que les maxima des vents de S.-E. sur les côtes méditerranéennes de France; les vents de N.-N.-O. sont les plus nombreux pendant l'été de notre hémisphère, surtout en juillet et août. Leur variation est liée à celle de l'alizé qui, pendant ces mois, remonte jusqu'aux côtes du Portugal. Elle l'est aussi à la position de la trajectoire des bourrasques ; en été un grand nombre redescendent sur l'Espagne et le Portugal, entraînées vers le grand désert, au lieu de continuer leur route vers le N.-E. ou l'E. comme d'autres le font, et comme il arrive en général pendant les autres saisons.

Entre le cap Saint-Vincent et le cap Spartel, les coups de vent les plus désagréables sont ceux de S.-O. Ils commencent en général par une brise d'entre S. et S.-S.-O.; ils sont dus au passage de bourrasques tournantes dont le centre est au N. de l'Espagne ou traverse cette région de l'O. à l'E. ou du S.-O. au N.-E.

Les cartes de janvier 1865 montrent des exemples de ce vent; on peut suivre le mauvais temps dont le centre aborde l'Europe par les Iles-Britanniques ou le golfe de Gascogne et marche ensuite vers l'E.

Nous avons vu ensuite en 1865 le vent tourner au N.-E. plus fréquemment à mesure que nous descendons vers le S. le long de la côte d'Espagne; cet effet, dû à ce que les montagnes arrêtent en partie les vents des régions O., ne se produit plus dans les fortes tempêtes. Dans ce cas, l'atmosphère est fortement agitée, et les montagnes n'offrent plus au vent qu'un obstacle insuffisant. On a donc aussi dans ces parages des coups de vent d'entre S.-O. et N.-O.

Nous en dirons autant du détroit de Gibraltar, où les vents d'E. et ceux d'O. sont dominants à cause de l'orientation de ce canal. Ceux de l'E. dominent les autres en été surtout, comme nous l'avons remarqué déjà en 1865. L'alizé y atteint, et ne pouvant s'alimenter par l'Espagne, il le fait par le détroit.

Les vents des régions O. dominent sur le golfe de Gascogne; Madrid, soumis à ces influences diverses, a des vents très-variables.

L'influence de l'Espagne, avons-nous dit, cesse de se faire sentir à une distance peu considérable des côtes; nous voyons en effet les vents d'entre N.-O. et S.-O. reprendre en hiver leur empire sur les côtes d'Algérie; pendant cette saison, ils soufflent presque seuls, et ils dominent de septembre en mai; ils tournent ensuite vers N. et quelquefois vers N.-E. Ils atteignent au N. leur plus grande violence,

Pendant l'été, les vents des régions O. cèdent la place à ceux des régions E., variant principalement entre N.-E. et S.-E. ou E. et S., suivant les points.

Ce fait n'est pas particulier aux côtes; les observations faites à l'hôpital militaire de Biskra (*), de 1845 à 1853, montrent en effet dans cette localité, située sur les confins du désert, deux vents dominant de beaucoup les autres :

Le N.-O. et le S.-E., le premier en hiver, le second en été et pendant la plus grande partie de l'automne.

Nous avons déjà fait voir en parlant du mistral la liaison entre les vents en Italie et les courants généraux; nous avons aussi remarqué une rotation apparente de l'air dans l'anse formée par les Alpes pendant l'année 1865. Les moyennes d'un grand nombre d'années conduisent à des résultats semblables. L'inspection des roses des vents à Rome, Livourne, Forli, Udine, Venise et Turin le montre immédiatement. Les vents forts sont sur les côtes du Piémont et de la Toscane surtout d'E. et de N.-E. en hiver, d'entre S.-O. et N.-O. en été. Cette dernière circonstance vient seule y troubler la beauté de l'été; l'hiver est caractérisé par de violents coups de vent accompagnés de pluies d'orages, mais les vents du N. balayent promptement l'atmosphère.

La mer Tyrrhénienne est très-tourmentée par des coups de vent de S.-O.; on peut voir dans le paragraphe où nous indiquons la cause du mistral, que le S.-O. observé dans les parages de la Corse n'est pas plus une dégénérescence du mistral que ne le serait le N.-O. ou le S. Tous les deux prennent naissance dans des conditions générales données, qui

(*) Observations publiées dans l'*Annuaire de la Société Météorologique de France pour* 1854.

sont le passage des bourrasques, et les cartes discutées plus haut donnent des exemples de mistral avec des vents très-divers sur les mers et la terre italiennes.

Si l'influence du voisinage des montagnes empêche quelquefois sur les côtes de Provence l'arrivée des vents du large, qu'elle remplace par de petites brises de terre, elle est sensible aussi sur les bords du golfe de Gênes et en Corse, partout en un mot où de profondes vallées et des ravins bordés de montagnes très-élevées s'ouvrent sur la mer. Les baies où viennent déboucher les ravins et les vallées sont le siége de coups de vent très-violents, dont l'action s'étend peu. Nice même, dont le climat est si connu pour sa douceur en hiver, n'est pas exempt de ces brises subites, qui y rendent l'été souvent désagréable pour les malades. L'amiral Smyth sentit lui-même sur les côtes E. du golfe de Gênes et de la mer Tyrrhénienne ces coups de vent, bien qu'au large régnât une fraiche brise de S.-O.

La chaleur de l'été est souvent dans les eaux corses diminuée par des vents violents qui descendent des montagnes. L'un d'eux, très-connu sous le nom de *libeccio* sur la côte orientale, vient du S.-O.; quand il souffle, tantôt il s'étend à peu de distance sur la mer, sa durée est faible et ce n'est qu'une brise locale; d'autres fois il se rattache comme les autres vents aux bourrasques voyageuses; il tourne alors à l'O., puis au N.-O. et au N. La soudaineté de ces vents côtiers force les marins de ces parages à employer des vergues qui peuvent se carguer en un instant comme la voile latine.

Les vents d'entre N.-O. et N.-E. causent souvent de nombreux désastres de décembre à mars sur les côtes non abritées de la Corse. Le S.-O. précède en général ces vents, il a parfois beaucoup de force aussi sur la côte occidentale. C'est pendant un libeccio, que la *Sémillante* s'est perdue dans le détroit de Bonifacio.

Sur la Sardaigne et tout autour, les vents dominants sont d'O.-N.-O. variant à N. et E. Le rapport des premiers aux seconds est environ de 42 à 29; les vents d'E. sont humides et malsains, les autres secs et sains. Le mistral ou vent de N.-O., souffle souvent et avec violence; son effet sur le district de Narra exposé à son action est analogue à l'effet des vents de N. sur le versant septentrional des Baléares. Le vent d'O. amène toujours de la pluie; quand il tourne à S.-O., sa violence cause

bien des dégâts. Les vents du S. n'arrivent qu'en hiver et battent violemment les baies qui leur sont ouvertes. Le *gregale* ou N.-E., en Sardaigne comme en Corse, a, dit-on, deux faces, car il est très-inconstant, soufflant par rafales. Il est accompagné d'abondantes averses. Le vent d'E., ou *bentu de Solo*, est annoncé par une couronne de nuages à la crête des montagnes; il est ordinairement accompagné de très-forts éclairs; sa grande humidité le rend incommode lorsqu'il dure longtemps. Le vent de S.-E. possède encore plus que l'E. des propriétés débilitantes à cause de sa richesse en vapeur d'eau; il règne sur toute la mer Tyrrhénienne et le golfe de Gênes; la Sicile, l'Italie, la Sardaigne et la Corse ressentent l'influence de ce vent orageux et humide.

La Sicile est bien proprement l'île centrale de la Méditerranée et elle présente aussi un état moyen par rapport au vent et à l'état du ciel. Pendant que le soleil est au N. de l'équateur, le ciel, bien que présentant rarement le bleu foncé des tropiques, est clair et brillant; après l'équinoxe d'automne, les vents deviennent impétueux et l'atmosphère comparativement chargée, les brouillards et la rosée augmentent, surtout sur les côtes, et il tombe d'abondantes averses. Les vents sont en général très-changeants. Le N. et l'O. dominent; ils sont secs et sains et donnent un ciel pur et un sentiment de bien-être; les habitants de Palerme préfèrent le *mamatili*, variété de mistral. Les vents d'E. à S. sont forts; ils amènent des brouillards malsains et ils sont souvent accompagnés de fortes averses et d'orages. A Palerme, le sirocco est particulièrement désagréable, bien que cette ville soit au N.-O. de l'île; mais elle est dans une plaine environnée de hautes montagnes, et les rayons du soleil se concentrent sur la ville.

Leur position géographique rattache à la Sicile les îles de Gozzo et de Malte situées au S. Ces îles ont le climat le plus constant de l'Europe. Cependant il souffle quelquefois des vents d'un caractère orageux et accompagnés de pluies vraiment tropicales. Les plus violents sont ceux de N.-E. Le S.-O. est le plus chaud des vents d'été; souvent il dessèche et brûle tellement les campagnes, qu'on perd tout espoir de récolte. L'échauffement extrême de la surface calcaire de Malte y rend les nuits d'été insupportables, surtout dans le mois d'août.

Le sirocco, ou vent de S.-E., est encore dans ces parages l'hôte le plus désagréable. Quand il commence à souffler, l'air est lourd et bru-

meux, et de longs nuages blancs s'étendent un peu au-dessous du sommet des montagnes jusque sur la mer, parallèlement à l'horizon ; il finit souvent par un calme soudain auquel succède un vent de N.-O. Le thermomètre n'indique au commencement aucune variation notable, mais il monte ensuite à 25 degrés, et dans les cas rares à 28 degrés. L'action de ce vent sur nos organes, due à sa grande humidité, fait croire, au premier abord, que sa température est plus élevée. L'hygromètre monte beaucoup et le baromètre descend. Ce vent débilitant ne dure, par bonheur, pas plus de huit jours; ces caractères, il les conserve jusqu'en Corse, où nous avons fréquemment observé ces mêmes phénomènes sur le versant oriental de l'île.

Entre le Delta du Nil et l'Adriatique, les vents sont sur mer d'O., comme nous l'avons vu pour l'année 1865; ils tournent vers l'E. par le N. Ils soufflent souvent avec violence et à l'improviste. Le temps y est généralement beau : l'ardeur de l'été est tempérée le long des côtes par des vents venus de la haute mer, et les vents y sont remarquablement doux.

Quand le soleil s'approche du tropique du Cancer, les vents tournent vers N. et y restent d'une manière assez continue pendant tout l'été ; quand le soleil retourne dans l'hémisphère austral, les vents retournent vers S. et O. Ces vents de N., qui dominent pendant toute la saison chaude. sont dus à l'aspiration exercée par le Sahara et l'Arabie sur les courants généraux qui viennent de l'Atlantique et traversent l'Europe, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut. Et, en effet, les vents les plus forts de ces régions sont au commencement du printemps d'entre N. et E. et d'entre S. et O., ou N.-O aux autres époques de l'année, comme il doit arriver dans une région sur laquelle passent des bourrasques de l'O. à l'E. ou de l'O.-N.-O. à l'E.-S.-E., le centre étant au N. du lieu d'observation; nous avons vu qu'alors les vents, surtout les forts, varient d'entre S. et N. par O.; puis, si des bourrasques se dirigent du N. au S. ayant leur centre à l'E. du lieu considéré, les vents forts varieront entre N.-O. et N.-E. Quant aux coups de vent du S., leur explication est la même que celle du sirocco.

Les vents de N. soufflent aussi presque constamment en été sur l'archipel grec et sont connus depuis longtemps sous le nom de vents *été-*

siens. Ils commencent après le solstice d'été et durent quelquefois jusqu'à la fin de l'automne. Ils sont interrompus surtout vers l'époque des solstices, c'est-à-dire des jours les plus longs et des jours les plus courts, par des vents de S.-E. et de S.-O. qui soufflent avec une grande force; en hiver cependant les coups de vent de N. sont encore plus à craindre et sont souvent accompagnés de neige ou de grêle. Les vents étésiens acquièrent quelquefois en été une violence extraordinaire, et, bien qu'ils soient utiles aux navigateurs, ils ne laissent pas d'être parfois pernicieux, froids et chargeant l'horizon d'épaisses vapeurs. Ils nuisent quelquefois beaucoup à la végétation, et, à peine ont-ils soufflé quelques heures, que les sommets des montagnes d'Albanie et de Grèce se couvrent de neige. L'examen de cartes synoptiques fait comprendre que ces vents sont dus, dans ce cas, à des bourrasques traversant la Russie et l'Asie-Mineure du N.-O. au S.-E. et exerçant leur influence sur la Méditerranée orientale, tandis que les vents forts de S.-E. et de S.-O. sont produits par des bourrasques courant de l'O. à l'E. en traversant l'Europe diagonalement et agissant successivement sur toute la Méditerranée; leur centre, étant à une latitude plus ou moins élevée, produit cette différence de vent.

Remontons-nous vers le N.-E., la tendance des vents de N. à dominer devient de plus en plus marquée; pendant la plus grande partie de l'année, le N. et le N.-E. règnent à Constantinople; Soulina (*) et Odessa la montrent dans leurs roses de vent avec une concordance remarquable. Après avoir dominé pendant les mois de décembre et de janvier, les vents des régions N. font rapidement place, en février et mars, à ceux des régions S. Ce fait concorde avec ce que nous avons vu des bourrasques, qui, à ce moment de l'année, traversent l'Europe centrale du N.-O. au S.-E., quelquefois même du N. au S. Les vents des régions S. diminuent en avril, mai, juin, époque à laquelle ils présentent un minimum; ils augmentent une seconde fois de nombre pendant les mois de juillet, août et septembre, diminuent brusquement en octobre comme ils ont augmenté en février, restent peu nombreux en novembre et croissent de nouveau en décembre, pour redevenir presque nuls en janvier. Les variations de ces vents sont liées à l'amplitude

(*) Soulina est située à l'embouchure du Danube.

des courants généraux; les bourrasques passent au N. de l'Europe et redescendent vers le S. sur la Sibérie. Elles n'agissent pas alors en général sur l'Europe méridionale, qu'une seconde ligne de bourrasques borde au S., produisant dans les régions que nous étudions des vents d'entre N.-O. et N.-E. Le mois de décembre fait exception à cause de la grande sphère d'action des bourrasques de ce mois; on sait que, souvent, leur centre passant sur le N. de l'Europe, elles étendent leur influence sur tout le continent, y donnant jusqu'en Algérie et en Asie-Mineure des vents d'entre S.-O. et N.-O.

Les courants ont plus d'amplitude en été, et le trop-plein de l'air dilaté de notre hémisphère se porte vers l'hémisphère austral; les bourrasques ont moins d'étendue; elles passent en grand nombre au S. des Alpes. Cependant, celles qui passent au N. de ces chaînes traversent les Pays-Bas, l'Allemagne, la Pologne et la Russie méridionale, pour se diriger vers la haute Asie; leur action s'étend sur la mer Noire et y occasionne des vents d'entre S.-E. et S.-O. tournant à N.-O.

Telle est la cause de la recrudescence des vents des régions S. qui s'observe dans cette saison.

Il nous reste à examiner les vents de l'Adriatique et de la haute Italie. Ils suivent en général à peu près la direction de l'axe de cette mer et lui sont rarement tout à fait perpendiculaires. Assez constants et d'entre S. et E. dans la partie méridionale, les vents sont très-variables au centre et au N. de l'Adriatique. Il ressort cependant un fait de l'examen des roses mensuelles des vents à Forli (*), Venise (**) et Udine (***). (Cette dernière ville est dans le Frioul, non loin de Trieste.) Le N. domine pendant l'hiver, le S. pendant l'été. On voit à Venise le vent, presque uniquement des régions N. en décembre, janvier et février, tourner vers E. et S. en mars, avril, mai et juin; le S. domine dans ce dernier mois; la rotation en sens inverse se fait sentir dès juillet et continue jusqu'en décembre.

Il suffit de jeter les yeux sur les cartes journalières déjà discutées,

---

(*) Observations extraites du *Bulletin de l'Observatoire du Collége romain*.

(**) Observations tirées du *Climat de Venise*, par MM. GIACINTHO NAMIAS et ANTONIO BERTI.

(***) *Le Climat d'Udine*, par VERCELLIO.

pour reconnaître que tous ces vents sont en liaison immédiate avec le phénomène général dont la connaissance sert de base à notre étude, je veux dire la bourrasque tournante avec toutes les propriétés qu'on lui connaît.

Dans les environs de Trieste souffle à des intervalles irréguliers, et surtout en été, un vent tempêtueux, appelé *Bora* par les gens du pays. Sa violence et sa sécheresse extrême le font redouter beaucoup. Tantôt il ne dure que peu d'instants, tantôt il persiste plusieurs jours de suite. Il peut être comparé au mistral et paraît souvent le dépasser en sécheresse. Ici se présente comme pour le mistral une hypothèse, simple en apparence, qui consiste à le considérer comme dû à un refroidissement et à une dessiccation subite de l'air passant sur les Alpes. Ce vent n'est pas plus le produit de circonstances locales que le mistral et le sirocco.

Il soufflait au commencement de février 1865; or, nous voyons que, le 6 de ce mois (*Pl. IV*), une bourrasque a son centre vers les îles Lipari. Sous son influence, les vents sont forts de N.-E. sur la Toscane, de N.-O. sur le golfe du Lion et l'Espagne, et assez forts de l'E. sur l'Adriatique. Le surlendemain, 8, la bourrasque a marché vers le S.-S.-E., et les vents tournent au N. en gardant une grande force sur l'Italie et l'Adriatique, pendant qu'ils diminuent sur la France et l'Espagne. Le lendemain, 9, la bourrasque continue de s'éloigner; après une journée de calme relatif, une autre lui succède le 10, et les vents reprennent la même marche que précédemment. Le Bora, dans cet exemple, est loin de se montrer comme un phénomène local.

Le 20 février, des vents violents des régions N. accompagnent, sur la mer du Nord, l'Angleterre et la France, une bourrasque dont le centre est sur la Suède méridionale; l'O. souffle fort sur l'Europe centrale, et le S. ou le S.-E. sur la Baltique russe. Le météore est gêné par les Alpes dans sa marche vers le S., et le vent retourne au S.-O. sur les pentes de ces montagnes; il souffle fort de N.-O. dans l'isthme pyrénéen, de S.-O. sur le golfe de Gênes et de S.-E. sur l'Adriatique septentrionale, tandis qu'il a encore peu de force sur l'Italie méridionale et la Sicile. Le mauvais temps marche vers le S.-E., et, dès le soir du 20, des orages éclatent sur l'Adriatique, tandis que le vent prend de la force de S. à Naples. Il reste faible à Palerme.

Le lendemain matin, le N. et le N.-O. ont redoublé de violence sur le golfe du Lion; le N. devient très-fort à Rome, et les vents ont tourné à N. ou N.-E. sur toute la Péninsule et sur l'Adriatique. Trieste, Livourne et Florence, mieux abrités par les Alpes, sont encore dans le calme. Des orages éclatent le soir sur l'Adriatique, et le vent devient violent de N.-E. à Lessina, fort de N.-N.-E. à Ancône, modéré de N.-O. à Naples et à Livourne. Le vent modéré d'O. le matin, à Palerme, y devient le soir fort de l'O.; un orage éclate; il neige et il grêle.

Le 22, au matin, le vent est très-fort de N.-O. à Palerme; il y souffle le soir en ouragan de N.-N.-O.; il est encore fort de N.-E. sur l'Adriatique, de N.-N.-O. à Rome; l'E. souffle fort à Trieste, et le N.-E. à Antibes, pendant que le mistral continue sur le golfe du Lion. Le S. revient sur l'Italie moyenne, et le calme se rétablit le lendemain et les jours suivants, se transmettant comme le mauvais temps du N.-O. au S.-E.

Une bourrasque qui traverse l'Europe de l'O. à l'E., du 12 au 15 juillet de la même année, donne le 12 : à Florence et à Livourne, des vents des régions O., et le soir des orages; à Rome, des éclairs durant cette journée; à Naples, de la pluie pendant la nuit du 12 au 13. Jusqu'alors, les vents sont restés d'E. à Trieste; on y ressent, le 13, de 6 heures à 9 heures du matin, une bourrasque d'entre O. et N., et un orage éclate à Lessina; les vents tournent au N. sur toute l'Italie; puis, au N.-E., ils y restent le jour suivant, et Lessina seulement signale du mistral fort dans la soirée du 14 juillet.

Pendant ce temps, une bourrasque très-étendue traversait l'Europe; arrêtée par les Alpes, elle s'était divisée, et, le 14, son centre était sur l'Asie; le calme était revenu sur l'Espagne, la France, l'Allemagne et la Russie.

Les autres vents qui soufflent dans ces parages sont aussi liés au mouvement général de l'air d'une manière toujours identique. Les 29 et 30 juin, et le 1er juillet, deux bourrasques se suivant de très-près traversent l'Europe de l'O. à l'E.; la série des trois cartes ci-jointes (*Pl. VI*) montre suffisamment le transport du mauvais temps et la liaison entre sa marche et la rotation du vent, d'après les principes exposés au commencement de ce mémoire.

Les plus petits accidents atmosphériques, tels que les orages de peu

de durée, de petits coups de vent insuffisants pour interrompre une période de calme, se rattachent à la circulation générale, et les mouvements de l'air qui les engendrent se transportent avec le courant général. On le suit comme à la piste, si l'on a à sa disposition un réseau assez compacte d'observations. Ce fait démontré complétement, d'après les inspirations de M. Marié-Davy, dans un travail de M. Fron, sur les orages de France, se rattache trop indirectement à mon sujet pour que je donne de nouvelles preuves de son exactitude; on a pu, du reste, en suivant les discussions précédentes, reconnaître toujours les bourrasques avec leurs caractères, leur côté dangereux, le mauvais temps et les vents violents qui les distinguent.

CHAPITRE V.

PLUIES.

Pluies. — Les courants généraux dont nous avons montré la distribution sont, à la surface de l'Europe, surtout des courants marins; ils viennent de l'O. et s'inclinent plus ou moins vers le S., suivant les époques de l'année, pour retourner à la zone d'aspiration d'où ils sont partis. Ils se dépouillent de leur humidité en passant sur l'Europe et arrivent presque secs en Russie, au moins dans la partie méridionale; au delà, sont les déserts arides de l'Asie et de l'Afrique, sur lesquels ne passe que de l'air desséché.

Il en résulte qu'on trouve de moins en moins de pluie sur notre continent à mesure qu'on en considère des points plus orientaux, et que sur l'Europe orientale la pluie doit être de plus en plus rare quand on descend vers le S. La conséquence est que les courbes, passant par les points où il pleut également, doivent être comme les côtes d'Europe dirigées du S.-O. au N.-E., les courbes de précipitation maxima étant les plus occidentales.

Les aspérités du sol modifient cette distribution de la pluie tout en lui laissant son caractère général. Des montagnes pouvant arrêter des

courants d'O. et les relevant sur leurs rampes favorisent évidemment la précipitation de la vapeur d'eau qu'ils renferment par suite de la diminution de température, à mesure qu'on monte dans l'atmosphère; le côté occidental d'une chaine doit donc recevoir plus d'eau qu'il n'en tomberait au même lieu, si la chaîne n'existait pas, et le côté oriental abrité contre l'action directe de ces courants doit en recevoir moins. Aussi, remarque-t-on que les courbes s'infléchissent dans le voisinage des hautes montagnes sur le penchant occidental desquelles on voit des maxima. On sait aussi que la pluie tombe plus abondamment en été dans le N., le centre et l'E. de l'Europe, à l'exception des côtes, tandis que dans le midi la pluie tombe surtout en hiver, et entre ces deux régions le maximum de pluie est en automne. Le nombre des jours de pluies est beaucoup plus grand que dans le N., mais les pluies du midi sont torrentielles, ce qui est bien plus rare dans le N.

Dans le midi, on est sous le régime des pluies tropicales dues aux contre-alizés. Dans le N., cette influence disparaît peu à peu, mais alors survient le contre-alizé prolongé sur le Gulf-Stream.

Les cartes de Méditerranée ci-jointes (*Pl. II* et *Pl. III*) donnent la distribution des pluies par saisons sur cette partie du monde; la plupart des documents qui nous ont servi pour les dresser sont extraits de l'*Annuaire de la Société Météorologique de France*.

L'automne est la saison pendant laquelle tombe le maximum de pluie dans toutes les stations de cette carte; l'été correspond au minimum. Il existe en automne plusieurs maxima. Le plus considérable est sur le N.-O. de la péninsule Hispanique. Il persiste pendant les autres saisons en perdant de son intensité. Il décroît très-rapidement vers l'E., et tout près de ce maximum se trouve un minimum aussi remarquable au S.-E. de l'Espagne. L'Andalousie, la Murcie et une partie de la Castille sont des contrées presque sans eau; dans la Murcie, il se passe des années sans qu'il tombe une goutte d'eau. Le climat est tout à fait saharien, et l'on peut même en quelques points cultiver le dattier et la canne à sucre.

Les courbes s'infléchissent vers l'E., de manière à prolonger le maximum le long de la vallée de l'Èbre et des Pyrénées.

Un second maximum existe sur le versant occidental des Alpes; il se prolonge sur le N. du plateau central de France en diminuant assez

rapidement d'intensité, et, vers le S., le long des Alpes, du Dauphiné et des Alpes maritimes.

Près de ce maximum est encore un minimum dans la plaine de la Crau et la partie basse de la vallée du Rhône. Ce minimum, moins bien marqué que le précédent, se relie avec une région à pluie minima qui longe la partie S. du plateau central et suit la vallée de la Garonne jusqu'à Bordeaux.

Le golfe de Gênes présente en toute saison un maximum ; il suit les pentes méridionales des Alpes Liguriennes et le versant occidental des Apennins ; il diminue d'intensité vers le S.

On voit enfin un dernier maximum sur la Vénétie et le Frioul ; assez considérable à cette époque de l'année, il persiste dans toutes les saisons. Une précipitation assez abondante se produit sur la plaine du Pô, à peu près également sur les deux versants, et elle augmente avec l'altitude. Le maximum se continue donc en diminuant d'intensité vers l'O. pour se relier avec celui du golfe de Gênes. Il diminue très-rapidement vers le S.-E. sur l'Adriatique. La quantité d'eau tombée garde à peu près la même valeur sur les deux côtés de cette mer; elle diminue très-vite à l'E. des Alpes Illyriennes et Dalmatiennes, et elle est très-faible sur la vallée du Danube et la région des Karpathes, tout en gardant une valeur un peu plus considérable sur le versant occidental de cette chaîne. Le minimum d'Espagne fait suite au désert du Sahara, mais ils sont séparés par une bande pluvieuse longeant le rivage de l'Algérie et de la Tunisie septentrionale. Cette bande fait suite au maximum espagnol.

Nous voyons, en effet, à Alger, une moyenne de 200 millimètres d'eau et une moyenne de 100 millimètres à Oran et à Mostaganem. Pour peu qu'on descende vers le S., la quantité de pluie diminue rapidement, et Biskra, sur les confins du désert, ne reçoit plus que 5 millimètres d'eau, quantité tout à fait insignifiante.

Hiver. — Nous retrouvons en hiver un maximum sur le N.-O. de l'Espagne et du Portugal, et un minimum sur le centre et l'E. de la Péninsule. Le maximum est moins considérable qu'en automne; ainsi, pendant cette dernière saison, il tombe à Coïmbre (Portugal) 1200 millimètres d'eau, et il n'en tombe que 600 millimètres en hiver; la pluie

est moins abondante sur le N. de la presqu'île; il en tombe en plus grande quantité sur le S.

Le littoral algérien participe à cette augmentation, et la quantité d'eau varie dans les différentes villes de 300 à 400 millimètres. Biskra même subit un accroissement de 5 à 15 millimètres. La variation est insensible sur l'Italie méridionale, mais il y a sur le N. une diminution notable jusque dans les deux maxima que l'on trouve dans les mêmes régions.

Le même effet se remarque sur la France, où la zone qui s'étend du golfe de Gascogne au plateau central est encore le prolongement du maximum d'Espagne, tandis qu'on observe un minimum peu accentué de Nîmes à Valence, en suivant la vallée du Rhône.

Si l'on trouve peu de changements sur l'Autriche, on voit une diminution notable sur les pentes occidentales des Karpathes; la quantité de pluie s'y est abaissée de 100 à 16 millimètres; elle est restée variable entre 50 et 100 millimètres sur l'Autriche, et elle est de 50 millimètres à l'E. des Karpathes.

Enfin la mer Ionienne et l'Adriatique méridionale ont subi une augmentation de 190 millimètres, tandis que l'on observe dans les îles Illyriennes une diminution de 200 à 100 millimètres.

Printemps. — La pluie se reporte vers le N. dans cette saison; sa quantité diminue sur les côtes d'Algérie de 400 à 200 millimètres; elle est restée à peu près la même sur les hauts plateaux de Biskra; elle augmente de 300 à 400 millimètres sur les côtes de l'Adriatique, et de 200 à 300 millimètres sur le plateau central de la France. Les maxima d'Espagne et d'Italie occupent toujours les mêmes positions; celui d'Espagne s'est resserré entre Coïmbre, Santiago et Oviédo; au lieu de 700 millimètres tombant en hiver au détroit de Gibraltar, il n'en tombe que 260 millimètres; en revanche, suivant le mouvement général indiqué plus haut, la précipitation a beaucoup augmenté sur le N.; elle a varié de 300 à 500 millimètres à Oviédo.

Le maximum du N. de l'Adriatique a un peu augmenté de hauteur, de 350 à 400 millimètres; la précipitation s'est légèrement accrue dans la plaine du Pô. En revanche, elle a diminué sur le golfe de Gênes, l'Italie et l'Adriatique centrale et méridionale. On observe tou-

jours sur cette mer un minimum s'étendant à l'E. des derniers contreforts des Alpes sur l'Autriche. Nous avons fait remarquer qu'en automne la précipitation se fait en plus grande quantité sur le versant occidental des Karpathes qu'à l'E. de ces montagnes; la précipitation restée constante à l'E. a beaucoup diminué pendant l'hiver à l'O.; elle y est devenue presque nulle. Elle augmente au printemps, devient de 95 millimètres à l'E., varie de 68 à 90 millimètres à l'O.; elle est généralement plus faible sur les parties basses de l'Autriche. Si le maximum d'Espagne a diminué de valeur, surtout dans le S., la quantité de pluie a augmenté au centre et à l'E. depuis l'hiver; ainsi elle a varié à Madrid de 40 à 60 millimètres; l'augmentation a par suite été moindre dans l'E.

Quant au centre et au S. de la France, nous y trouvons des variations sensibles, mais paraissant autant liées à des circonstances tout à fait locales qu'à un fait général. Cependant la précipitation qui avait, depuis l'automne, beaucoup diminué dans le N. de la vallée du Rhône et sur le N. du plateau central, est redevenue plus abondante dans ces régions; elle n'a pas changé sur le S. de la vallée du Rhône et la Provence; elle y est restée plus faible qu'en hiver; enfin elle a augmenté sur l'O. des Cévennes et des montagnes du Forez pour rester à peu près constante sur l'Océan.

Été. — La quantité de pluie devient presque nulle sur le S. et l'E. de la péninsule Hispanique, l'Algérie, la Sicile, l'Italie méridionale et presque toute l'Adriatique. Elle est ainsi très-faible sur le Languedoc, la Provence, l'Autriche. Dans toutes ces régions, elle ne dépasse pas 100 millimètres, et dans beaucoup d'entre elles elle n'est guère que de quelques millimètres.

Le maximum d'Espagne et de Portugal est de 500 millimètres à l'ombre; l'été est, après le printemps, la saison la moins pluvieuse pour ce point. Le maximum se continue, comme pendant les autres saisons, le long des montagnes des Asturies et des Pyrénées, en diminuant graduellement de valeur; il se continue sur la pointe occidentale des Cévennes jusqu'au N. du plateau central et de la vallée du Rhône; il varie alors entre 200 et 300 millimètres. A l'O. la précipitation diminue vers la Garonne, et on a une région maxima entre deux minima.

Le maximum du Frioul a augmenté de valeur depuis le printemps. Il est remarquable que, après l'automne, l'été est, pour cette région peu étendue, la saison la plus pluvieuse. C'est une exception dans le bassin méditerranéen. Seulement, tandis que la précipitation y était maxima à l'E., sur le versant occidental des Alpes Carniques, pendant les trois autres saisons, elle est, en été, maxima à l'O. sur le versant oriental des Alpes du Tyrol, et de 470 millimètres.

La vallée du Pô reçoit une quantité moindre de pluie; le versant N. en reçoit plus que le versant S.; elle varie peu régulièrement de l'E. à l'O.; un maximum existe toujours au S. des Alpes Liguriennes; il est séparé du maximum de la plaine du Pô par une zone minima peu accentuée qui occupe le versant N. des Alpes Liguriennes et de l'Apennin septentrional; mais ce maximum est devenu presque insensible. La précipitation, qui y dépassait 500 millimètres en automne, y est réduite à 160 millimètres.

Enfin, le maximun de la mer Ionienne a disparu; la quantité de pluie est très-faible sur l'Adriatique et l'Italie; elle diminue vers le S.-E.; elle est très-faible aussi sur l'Autriche, et elle n'a augmenté quelque peu que dans le voisinage des Karpathes; elle y dépasse 100 millimètres à l'E. comme à l'O. de la chaîne.

On voit, en résumé, comme lois générales: le décroissement de la condensation du N. au S. et de l'O. à l'E.; le maximum de pluie en automne dans le N., le centre et l'O. de la Méditerranée, et, en hiver, dans le S.

La précipitation excessivement faible en été, sur le midi, ne s'y fait qu'à de très-rares intervalles par des averses ou des pluies d'orage; l'effet de la sécheresse de l'été se fait sentir de plus en plus quand on s'approche des déserts africains. Ainsi l'été, sous l'influence du S.-O. persistant, est parfois tellement chaud et sec à Malte, que les campagnes sont brûlées et les récoltes perdues. On a vu plus haut que l'effet opposé s'obtient quand règne le S.-E. ou sirocco, vent pendant lequel l'hygromètre indique un accroissement notable de l'humidité et le baromètre baisse beaucoup.

Entre le Delta du Nil et la petite Syrte, le temps est généralement

beau; il n'est troublé, de temps en temps, que par des pluies d'orage de courte durée.

Le climat de l'Attique est sec et le ciel y est généralement clair; l'air de l'Attique a toujours passé pour le plus pur de la Grèce, et il l'est encore aujourd'hui; un papier a pu être exposé à l'air toute la nuit par M. Lusieri, dont la maison était sur l'emplacement de l'ancien Prytanée, et l'on pouvait tout aussi bien écrire dessus le lendemain matin. On attribue même à cette grande sécheresse de l'air l'étonnante conservation des monuments athéniens.

On sait que les moyennes annuelles des pluies ont indiqué une précipitation plus grande sur le versant occidental des chaînes de montagnes que sur le versant oriental. Cela tient à ce que nous sommes soumis à des courants d'O. plus fréquents que ceux d'une direction opposée et que, de plus, les courants d'O. sont marins pour nous; or, nous trouvons dans nos cartes une exception remarquable à cette règle. Il pleut plus en effet pendant l'été sur le versant italien des Alpes que sur le versant français; la quantité de pluie qui tombe au N. de l'Adriatique sur les Alpes Tyroliennes est égale à celle qui tombe sur les côtes N.-O. d'Espagne et de Portugal, et elle est en certains points presque le double de la précipitation qui se produit en France. La pluie tombe aussi plus abondamment sur le versant septentrional de la plaine du Pô que sur le versant méridional. La circulation atmosphérique exposée plus haut nous donne la raison de ces particularités.

Les courants marins sont considérablement ralentis sur l'Europe; il en résulte un afflux moins grand d'air chargé d'humidité. L'échauffement de la terre contribue, du reste, à diminuer la condensation. L'effet général est une diminution de la précipitation; par exception, elle est la plus faible en hiver dans les parages que nous étudions; ensuite viennent le printemps, l'été et l'automne qui présentent le maximum. D'autre part, les vents sont surtout des régions N. en hiver; ils tournent par E. vers S.-E. qui domine en été, et ils retournent enfin par E. vers N. Or, pour qu'une condensation se produise, il faut que l'air soit chargé de vapeur d'eau et qu'il rencontre des corps relativement froids. C'est ce qui arrive dans la Carniole ou le Tyrol à une certaine altitude; les vents du S.-E. et d'E., qui dominent en été et en automne,

sont beaucoup plus humides que ceux du N.-E. ou du N. qui soufflent en hiver. Ce fait, d'une précipitation plus abondante dans le golfe alpin que sur le versant occidental des montagnes, montre une fois de plus que les vents de ces régions ne viennent pas en réalité de l'E., bien qu'ils soufflent de cette direction; sinon ils arriveraient dépouillés de leur vapeur d'eau après leur passage sur les Karpathes, les Balkans et les Alpes, et les pays situés à l'E. de ces montagnes recevraient une quantité plus grande de pluie, ce qui est contraire au résultat donné par nos cartes.

L'automne est la saison des pluies pour le bassin occidental de la Méditerranée, sauf pour l'Algérie, qui a son maximum en hiver. Les divers maxima décrits plus haut s'expliquent tous, si l'on songe aux mouvements généraux de l'air. Dans cette saison, les courants commencent à se porter vers le N. Ce ne sont plus, comme en été, des courants de retour appelés par l'aspiration des déserts et ne pouvant pénétrer la masse d'air dilaté qui environne le pôle N.; ils passent de l'Atlantique sur l'Europe, sont en partie ralentis par les Alpes, les Pyrénées et les montagnes espagnoles, et déposent une grande partie de leur vapeur d'eau sur les pentes occidentales de ces chaînes. Ces vents d'O. traversant l'Espagne et l'isthme pyrénéen ont évidemment dû s'y assécher; aussi pleut-il très-peu sur les côtes méditerranéennes d'Espagne. Dès qu'ils retrouvent la mer, ils se rechargent de nouveau de vapeurs, et les vents d'E. et S.-E. sont des vents marins pour les côtes méditerranéennes. L'afflux de l'air vers le N. augmente encore pendant l'hiver, et l'hémisphère boréal continuant à se refroidir, les précipitations commencent plus près de l'équateur; elles suivent dans leur marche le soleil, et les côtes d'Afrique ont alors leur maximum de pluie. Il en tombe même plus dans cette saison qu'en tout autre point du bassin méditerranéen, sauf au détroit de Gibraltar, où la pluie est alors très-abondante. La présence du maximum de cette saison sur la côte du Portugal corrobore ce que nous avons dit du mouvement général de l'air, sans quoi les pentes septentrionales des chaînes seraient le siége d'une précipitation plus grande. Les vents du N. qui soufflent vers la fin de l'hiver sur l'Europe occidentale et jusque sur l'Adriatique sont secs; ils ne changent pas les valeurs relatives des moyennes; mais les vents d'entre S.-O. et N.-O., résultat des fortes

bourrasques hivernales, donnent d'abondantes condensations, surtout sur les versants des chaînes exposés directement à leur action; aussi voit-on en Espagne, en France, en Italie, les versants S.-O. présenter partout des maxima. La quantité d'eau qui tombe en Autriche et en Hongrie est pour la même raison insignifiante. Les minima qu'on observe en toute saison sur le bas Languedoc et les parties basses de la vallée du Rhône, et surtout sur le centre, l'E. et le S.-E. de l'Espagne, s'expliquent facilement; les vents sont sur cette dernière partie presque toujours d'entre S. et N. par O. L'air qui s'est dépouillé en partie de son humidité en passant sur les montagnes ne rencontre plus ensuite d'obstacles qui l'arrêtent, et sa condensation s'en trouve diminuée; rencontre-t-il une nouvelle chaîne plus élevée que la première, une nouvelle condensation s'y produit; c'est ce qu'on voit en Italie, dans le golfe de Gênes et l'anse des Alpes Suisses et Tyroliennes; un maximum sur le versant alpin de la plaine du Pô, mais à une grande altitude. En Espagne, il en est probablement de même; des précipitations sur les versants occidentaux des chaînes doivent interrompre le minimum indiqué sur nos cartes, mais les observations nous manquent pour les constater. Une autre cause puissante de condensation est le mélange de couches d'air à des températures différentes. Cette cause se manifeste surtout dans les bourrasques et donne lieu à des pluies abondantes dans le demi-cercle dangereux; à cette cause on doit attribuer en grande partie cette circonstance que les minima d'Espagne, d'Afrique et d'Europe orientale ne sont pas tout à fait nuls. La remarque que je viens de signaler est mise hors de doute par l'étude des bourrasques en mer; leur demi-cercle dangereux seul est le siége de pluies abondantes, et l'on ne peut pas chercher dans ce cas la cause de la pluie dans le refroidissement de l'air au contact d'un sol ici uniforme et présentant une résistante presque nulle au mouvement de l'air.

La distribution des pluies peut, comme on le voit, donner une idée de la marche des courants généraux. Seulement les montagnes ont une action modificatrice dont il faut tenir compte : elles tendent à augmenter la précipitation due au passage de courants humides indépendamment des chutes d'eau qui résultent du passage des bourrasques. Les dernières ont, du reste, un caractère tout différent des premières.

CHAPITRE VI.

ISOBARES. — RELATION ENTRE LES LIGNES ISOBARES MOYENNES ET LE PASSAGE DES BOURRASQUES.

Une bourrasque a pour caractère essentiel l'existence d'une zone à fortes pressions autour d'elle, puis la diminution de la pression de la circonférence au centre.

Si une bourrasque passe sur une région, soit AOA' (*fig.* 1, p. 276) la trajectoire de son centre de figure O, le baromètre baissera en un point de cette trajectoire jusqu'à un minimum qui arrivera quand le point O passera au lieu d'observation, puis il remontera jusqu'à sa hauteur primitive. Il résultera de ces variations une certaine moyenne correspondant au temps pendant lequel est passée la bourrasque. La moyenne sera la même pour tous les points situés sur la trajectoire du centre.

Si de même nous considérons la moyenne des hauteurs résultant du passage de la bourrasque, en un point situé hors de cette ligne, elle sera la même qu'en tout point d'une parallèle menée par le point considéré à la trajectoire du centre. Cette moyenne sera de plus différente de la première; elle sera d'autant plus haute que l'on se mettra plus loin du centre. Ce fait que l'observation vérifie est évident, puisque le baromètre partant de la même hauteur ou d'une hauteur plus grande baisse moins pour remonter aussi haut.

Il en résulte que si dans un air primitivement calme, et à pression constante et uniforme, il passe une bourrasque après laquelle l'air reprend son état primitif, la bourrasque laissera sa trace sur les moyennes barométriques de la région comme un sillon dont le thalweg est la trajectoire du centre de rotation, et dont les bords, parallèles au thalweg, sont les enveloppes des positions successives des tangentes parallèles à chaque élément de la trajectoire du centre, menées au bourrelet de la bourrasque.

Si plusieurs bourrasques passent successivement à la même place et ont la même étendue, rien ne sera changé dans les courbes isobares moyennes.

L'une d'elles, marchant parallèlement aux précédentes, passe-t-elle plus au S., mais à une petite distance, le sillon qu'elle produit se superpose au premier, de manière à diminuer sa profondeur; mais le premier effet affaibli subsiste encore; on a seulement un sillon plus large et moins profond. On répéterait la même chose dans le cas où plusieurs bourrasques, se dirigeant suivant des routes parallèles entre elles, passeraient à de faibles distances les unes des autres par rapport à leur cercle d'action.

Si donc, dans une région du globe, les bourrasques sont assujetties à suivre un lit constant, les courbes isobares présenteront dans cette région une ligne minima, à droite et à gauche de laquelle la pression s'augmentera, en suivant des courbes parallèles à la première.

Admettons qu'une bourrasque étant passée, une seconde suive une trajectoire coupant la première; les deux sillons se couperont, et il résultera de ce fait une dépression centrale avec des bords diversement élevés et quatre sillons partant du centre de la dépression, diamétralement opposés deux à deux. La dépression ne fera que s'accuser davantage si plusieurs bourrasques passent en ce point suivant des routes différentes. Le même effet subsistera, bien qu'affaibli, si les centres des bourrasques ne passent pas tous au même point, à condition qu'ils passent à une distance faible les uns des autres, par rapport à leur cercle d'action. Or, c'est ce qui arrive sur le bassin occidental de la Méditerranée. Une autre cause tend à y augmenter cet effet : c'est la production fréquente, dont nous avons parlé plus haut, d'un centre de rotation au S. des Alpes.

Il en résulte que les isobares moyennes prennent dans ces parages une forme très-particulière indiquée pour la première fois par M. Renou à la *Société Météorologique de France* et insérée dans l'*Annuaire* de cette Société pour 1864.

La pression sur le golfe de Gênes est de $761^{mm},5$; autour de ce minimum s'étend une courbe 762 millimètres, qui passe sur la Provence, coupe la côte du Languedoc près de Cette, descend du N. au S. à travers le golfe du Lion, court vers l'E. quand elle est arrivée à la latitude de Barcelone, coupe la Sardaigne à peu de distance du détroit de Bonifacio, pénètre dans l'Italie près de Rome, remonte le long de la crête des Apennins, passe près de Florence, Milan et Turin, pour franchir

les Alpes près de Draguignan. Une courbe 763 millimètres se dirige à peu près de l'O. à l'E., d'Alicante à Palerme, et s'infléchit légèrement vers le S. Une ligne 764 millimètres occupe les pentes septentrionales des montagnes algériennes; elle est presque parallèle à la précédente et s'en rapproche un peu vers l'E. Au N. du minimum nous voyons également une courbe 763 millimètres, partant de Madrid; elle traverse les Pyrénées près de Toulouse, passe sur le plateau central de la France, vers Besançon, Strasbourg et l'Allemagne. Au delà de cette courbe, la pression diminue de telle sorte que sa variation est représentée par une série de courbes parallèles à la courbe maxima. L'écartement des courbes augmente un peu vers l'O. Cela tient à ce que nous avons vu la plupart des bourrasques, qu'elles viennent de l'O.-N.-O. ou de l'O.-S.-O., passer entre les Alpes Italiennes et les Alpes Scandinaves, dans cette sorte de couloir où leurs trajectoires ne peuvent guère s'écarter d'une direction constante; d'où le resserrement des courbes et leur parallélisme.

Ce curieux résultat invite à étudier de près les variations moyennes des lignes isobares à la surface de l'Europe, et à les étendre, s'il est possible, à la surface de tout le globe; leur examen ne peut que conduire à des données très-précieuses sur les positions des courants généraux aux diverses époques de l'année; ces données sont complétement indépendantes des perturbations capables de masquer le phénomène principal, et elles viennent s'ajouter aux roses des vents pour les compléter et confirmer les résultats auxquels conduisent ces dernières.

Il suffit de se reporter à la circulation atmosphérique moyenne dans le bassin méditerranéen occidental pour voir qu'au minimum de pression correspond une apparence de rotation de l'air autour du bassin dans le sens rétrograde comme dans le cas des bourrasques. Les vents de S.-O. dominant sur la France océanienne, les Pays-Bas et l'Allemagne, sont aussi sensiblement parallèles aux courbes moyennes de cette partie de l'Europe. Il ne peut du reste en être autrement; en général, les lignes isobares doivent être et sont parallèles aux vents moyens. L'étude des variations moyennes de ces lignes serait donc d'une aussi grande utilité au moins que celle des isothermes mensuelles pour l'étude de la circulation atmosphérique générale, et ces deux méthodes se prêteraient un mutuel secours.

Ondes atmosphériques. — C'est ici le lieu de mettre en garde le lecteur contre certaines illusions résultant d'une interprétation des faits basée sur des observations insuffisantes. Ces illusions ont enfanté quelquefois de célèbres théories auxquelles la science a dû des progrès rapides, car jamais les idées n'ont empêché le bien dans les sciences; on ne doit y redouter que leur absence.

Lorsqu'une bourrasque existe sur un lieu, si elle marche de l'O. vers l'E., le minimum de la pression barométrique s'observera simultanément en tous les points du diamètre N.-S. de la bourrasque. En général, le minimum se produira simultanément en tous les points d'un diamètre perpendiculaire à la trajectoire du centre de la bourrasque. Une seconde bourrasque semblable à la première suit-elle exactement la même route, le baromètre montera de quantités différentes aux divers points de la ligne où nous venons d'observer le minimum, mais il arrivera en même temps au maximum après lequel il décroîtra pour repasser en même temps par le minimum.

Si les bourrasques ont une grande étendue, les lignes considérées plus haut auront une longueur considérable, et l'on pourra croire à l'existence d'ondes atmosphériques se propageant dans le même sens que le courant. Une onde condensée succéderait régulièrement à chaque onde dilatée.

Une ligne de bourrasques, comme on l'a vu, n'existe jamais seule; il en existe généralement deux sur l'Europe, quelquefois même trois. Si les bourrasques y marchaient de pair, c'est-à-dire que leurs centres fussent toujours sur des perpendiculaires communes à leurs trajectoires, les minima et les maxima de ces systèmes seraient tous bout à bout et donneraient l'apparence d'un seul système d'ondes. Comme il n'en est pas ainsi, on a des lignes courbes de maxima et de minima, donnant plusieurs systèmes d'ondes parallèles ou à peu près et formant une onde générale.

Les bourrasques vont vers l'E. dans la partie occidentale de notre continent; elles descendent ensuite vers le S.-E. et le S. En Asie, pendant l'été, l'appel des déserts de Gobi, du Turkestan et de l'Arabie infléchit leurs trajectoires à peu près du N. au S. Aussi le savant directeur de l'Observatoire de Bruxelles, M. Quételet, auteur de cette belle théorie, a-t il trouvé que les ondes atmosphériques se transpor-

tent chez nous au mois de juin de l'O. à l'E., du N.-O. au S.-E. dans le centre de notre continent, puis du N. au S. en Russie et en Sibérie.

Je ne m'appesantirai pas sur des résultats déjà rappelés au commencement de ce travail et bien connus de tout le monde. Je ferai remarquer seulement ce qu'il y avait d'artificiel dans la considération de ces ondes indiquées par des maxima et des minima très-différents les uns des autres, ce qui avait amené l'auteur à considérer plusieurs systèmes d'ondes interférant entre elles et produisant par leur combinaison l'état général de l'atmosphère.

Défaut de coïncidence entre le maximum du vent et le minimum de pression. — De plus, cette théorie n'expliquait pas plus que les précédentes les circonstances des tempêtes telles que la rotation rapide du vent, la baisse rapide du baromètre, l'arrivée de la tempête précédée d'une hausse barométrique, puis la chute rapide après ou pendant laquelle se font sentir les coups de vent. Je ne reviens pas sur ce sujet assez developpé par l'auteur de la théorie générale des bourrasques (*), mais une théorie générale devant s'appuyer sur l'explication des moindres particularités des phénomènes, je vais montrer comment la nouvelle théorie fait comprendre le défaut de coïncidence, dans les tempêtes, du maximum de la force du vent et du minimum de la pression, leur coïncidence dans d'autres cas et l'intervalle variable de temps qui les sépare dans toutes les occasions.

Or, la théorie de M. Marié-Davy donne raison de toutes les particularités de ce genre.

Une masse d'air tournant autour d'un axe au milieu d'une autre qui ne participe pas à son mouvement se trouve ralentie sur ses bords; comme, du reste, la vitesse due à la rotation augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe, il y aura nécessairement une circonférence sur laquelle elle sera maxima. Soit BMM'B' (*fig.* 1, p. 276), cette circonférence et O le centre de la rotation; soit BB' la ligne des positions successives d'un point par rapport à la bourrasque. Ce point, d'abord en B, sera ensuite à des distances plus petites du centre; il en sera le plus près

(*) *Les Mouvements généraux de l'atmosphère et des mers*, par H. MARIÉ-DAVY.

possible, quand il atteindra le milieu de BB′; il passera donc dans des couches d'air dont la vitesse absolue due à la rotation diminuera jusqu'à ce moment pour augmenter ensuite. Mais pour avoir la vitesse réelle du vent par rapport à l'observateur, il faut à chaque instant composer la vitesse de translation, constante en grandeur et en direction, avec cette vitesse variable; or, la dernière est maxima en B, minima en D. Dans le premier cas, elle fait un angle avec la vitesse de translation; cet angle est devenu nul en D; on ne peut donc voir *à priori* la variation de la résultante de la vitesse du vent.

On se rappelle que le mouvement absolu de chaque molécule d'air est le même que si, à chaque instant, la masse entière tournait autour d'un centre instantané de rotation tel que la vitesse due à la rotation fût en ce moment égale à la vitesse de translation et de sens contraire. Soit MM′ le lieu des positions des centres instantanés successifs, O′ sa position actuelle, la vitesse du vent en un point quelconque de BDB′ est perpendiculaire à la droite menée de ce point à O′ et lui est proportionnelle; les deux maxima auront donc lieu en B et B′, et seront séparés par un minimum en D. Or, c'est en D qu'on observera le minimum de la pression barométrique. Donc, ce dernier ne coïncide pas avec le maximum de la vitesse du vent. Cette dernière a deux maxima qui n'ont pas la même direction que la translation de la bourrasque; la bissectrice de l'angle formé par les deux directions du vent correspondant au maximum est parallèle à la trajectoire du météore. Ces deux maxima seront plus ou moins distincts et distants l'un de l'autre, suivant l'étendue de la bourrasque, et dans une même bourrasque suivant la distance du lieu d'observation à la trajectoire du centre. S'il est sur cette ligne en A, les deux maxima du vent se produiront aux époques les plus distantes l'une de l'autre; le premier sera de S.-S.-O, le second de N.-N.-O. dans le cas de la figure; si le point est sur MM′, la distance entre les deux maxima sera moins grande; le premier sera de S., le second de N. En B, l'un sera du S.-O., l'autre du N.-O., et ils seront moins distants l'un de l'autre. Ils se rapprocheront à mesure qu'on se rapprochera de E; en même temps, ils auront des directions de moins en moins différentes, et en E ils se confondront en un maximum d'O. qui se produira en même temps que le minimum du baromètre. Il en est de même dans la partie supérieure de la bourrasque.

Donc, en général, le minimum de la pression ne doit pas coïncider avec le maximum du vent, et ce dernier doit être double. La coïncidence ne peut avoir lieu que dans un cas pour le demi-cercle de la bourrasque où il y a des vents forts; c'est, du reste, en ce point que le baromètre aura le moins baissé, et que le vent aura été le plus fort. La recherche de ce lieu dans une bourrasque a une grande importance. S'il se trouve indiqué sur la carte du météore à un instant déterminé, on connait la direction de la translation d'après l'inspection de cette seule carte. La perpendiculaire à la vitesse du vent en ce point renferme le centre instantané de rotation; la vitesse du centre de rotation est égale à la vitesse de translation. Considérons maintenant le point Q; la différence des vitesses du vent en E et en Q est le double de la vitesse de translation. L'inspection des vents sur la carte d'ensemble d'une bourrasque à un instant quelconque donne donc la rapidité et la direction de sa marche à cet instant.

Quand la bourrasque a peu d'étendue, ou que, comme il arrive généralement, la vitesse maxima due à la rotation se rencontre à une distance peu considérable du centre, les deux maxima se suivent de près, et on les observe quand le centre de la bourrasque passe non loin du lieu d'observation. La fameuse tempête du 13 décembre 1864, qui a sévi à Lisbonne, puis sur l'Espagne et la Méditerranée, nous en fournit entre autres un exemple. Ces détails sont extraits d'une lettre adressée par M. Fradesso da Silveira, directeur de l'Observatoire de l'infant don Luiz, à Lisbonne, à M. le directeur de l'Observatoire impérial de Paris, et insérée dans le *Bulletin international* du 22 décembre 1864.

« Le 12 décembre, à 9 heures du soir, la hauteur du baromètre, corrigée et réduite au niveau de la mer, était de $759^{mm},5$, et le vent calme de S.-O. De 9 heures du soir à 6 heures de la matinée du 13, la colonne barométrique est tombée à $751^{mm},4$. Pendant la nuit, quelques averses avec vent d'O. Le 13, à 6 heures du matin, le vent commençait à fraîchir du côté du S., tournant à S.-E. Le baromètre était à 8 heures à 747 millimètres; le vent plus frais soufflait de S.-E. A $9^h 45^m$, le vent soufflait avec violence; la vitesse en était de 84 kilomètres à l'heure; le baromètre marquait $737^{mm},3$. La pression descendait ensuite à $731^{mm},8$, pendant que le ciel s'éclaircissait à l'E. et que le vent, devenu considérablement calme, tournait à O.-S.-O. par S.,

et allait jusqu'à O.-N.-O. De $10^h 45^m$ à $10^h 30^m$, un second orage plus violent que le premier a laissé marquée la vitesse exceptionnelle du vent de 108 kilomètres à l'heure. »

Ainsi, en résumé, il y eut deux maxima du vent; l'un à S.-E, l'autre à O.-N.-O.; le premier à $9^h 45^m$, le second entre $10^h 15^m$ et $10^h 30^m$, et ils furent séparés par un calme pendant lequel le baromètre atteignit son minimum.

Une circonstance vient souvent compliquer ces faits. La marche du baromètre est généralement en avance sur les variations du vent à terre, et la rotation du vent est généralement précédée même par celle des nuages; si ces derniers forment plusieurs couches faciles à distinguer, on les voit dans presque tous les cas, indépendamment des illusions d'optique dues à leur déplacement relatif, se mouvoir dans des directions différentes, les nuages les plus élevés étant en avance dans leur rotation sur ceux situés plus bas. M. Marié-Davy explique ce fait par le retard que les aspérités du sol apportent dans le transport de la partie inférieure du tourbillon. En observant des tourbillons à marche peu rapide, ou en tenant compte de la cause d'erreur dont je viens de parler, on vérifie les conclusions précédentes.

Nouvelle loi de rotation des vents. Application de cette loi à la prévision du temps. — Un savant météorologiste de Berlin, Dove, a donné une loi de rotation des vents en un lieu déterminé; la rotation de la girouette se fait généralement dans notre hémisphère en sens direct, c'est-à-dire dans le sens de la rotation des aiguilles d'une montre, et elle se fait dans l'autre hémisphère en sens opposé.

Pour Dove, il n'y a, à proprement parler, que deux vents : ceux de N. et ceux de S.; le N.-E. et l'E. sont des dégénérescences d'un vent de N. qui s'éloigne de son point de départ; le S.-O. et l'O. sont de même des dérivés du vent du S.; le N.-O. et le S.-E. sont le résultat de la combinaison : le premier d'un vent du S. finissant avec un vent du N. commençant; et l'autre d'un vent du N. finissant avec un vent du S. commençant. La succession en un lieu des courants de N. et de ceux du S., ou des courants polaires et des courants équatoriaux, y donne naissance à la rotation directe de la girouette pour notre hémisphère, et à la rotation inverse pour l'autre.

Si des courants polaires et des courants équatoriaux étaient réellement en lutte continuelle à nos latitudes, ne cherchant qu'à se déplacer mutuellement, comme le pense Dove, la rotation du vent devrait toujours se faire dans le même sens dans chaque hémisphère. Or, il n'en est rien, et Dove l'a bien reconnu lui-même. Il a montré que dans nos contrées le nombre des rotations directes est beaucoup plus considérable que celui des rotations inverses, et il a, en donnant la théorie des cyclones, fait voir que le passage d'un de ces météores sur une contrée peut amener des exceptions à sa loi, comme il peut dans d'autres cas la confirmer.

Et en effet, si nous considérons une bourrasque tournante dans laquelle l'air se meut en sens inverse des aiguilles d'une montre, et qui se transporte de l'O. à l'E., tout observateur placé dans un demi-cercle méridional verra le vent tourner dans le sens direct; il le verra tourner dans le sens rétrograde s'il est au N. du centre instantané de rotation; le passage d'une bourrasque sur une région donne donc, en certains points, des confirmations de la loi et forcément des exceptions en d'autres points.

Si la bourrasque tournante était un phénomène rare et de peu d'étendue, l'inconvénient ne serait pas grand. Mais M. Marié-Davy a découvert à l'Observatoire impérial de Paris, où il dirigeait le service météorologique internationnal, une loi d'une importance extrême, dont nous avons déjà parlé et dont voici l'énoncé :

Tous les mauvais temps sont liés à l'existence de bourrasques tournantes dans lesquelles l'air, dans l'hémisphère boréal, tourne en sens rétrograde, c'est-à-dire de telle sorte qu'un observateur qui suivrait une molécule d'air dans son mouvement autour du centre de rotation, aurait dans tous les cas le centre à gauche. Le contraire arriverait dans l'hémisphère austral. Ces bourrasques sont entraînées par les courants atmosphériques généraux. La bourrasque, devenue ainsi un phénomène général, dont la présence est très-fréquente dans nos parages, explique les nombreuses exceptions trouvées à la loi de Dove.

Or, on conclut des faits aujourd'hui mis en lumière par M. Marié-Davy une loi générale de rotation du vent dont nous montrerons l'utilité pratique pour prévoir le temps ou, au moins, l'arrivée des bourrasques et le lieu de leur passage.

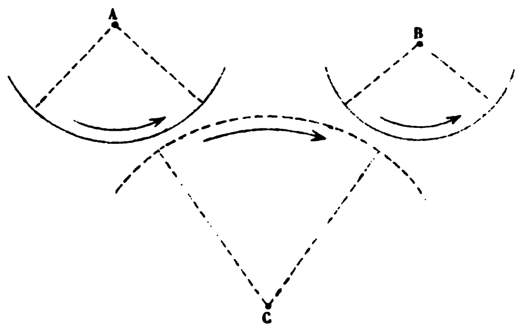
Supposons un observateur présentant toujours le dos au vent; le centre de la bourrasque étant toujours à sa gauche dans notre hémisphère, l'angle dont il tournera, pendant le passage du météore, sera aussi le déplacement apparent du centre de rotation par rapport à lui; et ceci est vrai, que l'observateur soit dans le demi-cercle de droite ou dans celui de gauche. Dans le premier cas, le centre de la bourrasque tendra à dépasser l'observateur, dans le second à se laisser dépasser par lui. C'est encore vrai, quels que soient le sens de la rotation de l'air autour du centre et le déplacement du centre. On peut donc dire pour les bourrasques quelconques de l'un ou de l'autre hémisphère que, si un observateur entre dans le cercle d'action du météore, il verra la rotation du vent se faire dans le même sens que le mouvement apparent du centre du météore et l'égaler en grandeur.

Si cette bourrasque est suivie d'une autre, la réaction de cette dernière sur la première modifie la marche de l'air et nous oblige d'étudier ce qui se passe. Or, supposons que l'on soit dans notre hémisphère et dans le demi cercle de droite d'une bourrasque allant de l'O. à l'E. Pendant que la bourrasque passe, le vent tourne dans le sens direct en même temps que le baromètre baisse, la pression arrive à un minimum, le baromètre remonte et le vent n'en continue pas moins sa rotation directe. Si une bourrasque vient après, le mouvement de l'air dans sa partie droite (*) antérieure étant de S.-O., tandis qu'il est de N.-O. dans la partie droite postérieure de la première, tend, à une certaine distance du premier centre, à ramener le vent vers O., tandis que le baromètre monte toujours. Nous dirons qu'à ce moment l'observateur cesse d'être sous l'influence de la première bourrasque sans être encore sous celle de la seconde. Le vent arrive à O. et le baromètre atteint sa hauteur maxima. La rotation du vent vers O.-S.-O., S.-O. continuant, le baromètre commence à baisser; la baisse continue pendant que le vent, ayant rétrogradé quelquefois jusqu'à S. et même S.-E., commence à reprendre le mouvement direct. Nous dirons qu'à ce moment l'action de la seconde bourrasque commence à se faire sentir, et la loi énoncée plus haut commence à s'appliquer.

(*) Nous considérons la droite et la gauche de la bourrasque par rapport à la trajectoire de son centre, d'après les conventions qui servent à définir la rive droite et la rive gauche d'un fleuve.

Pendant que l'observateur est entre les deux bourrasques, l'énoncé précédent s'applique en le modifiant. L'observation montre que, lorsque plusieurs bourrasques se suivent, il y a entre elles des maxima de pression barométrique qui donnent aux courbes isobares, correspondant aux fortes pressions qui les environnent, la même forme qu'auraient des courbes de niveau dans une chaîne de montagnes dont les bords sont découpés par des vallées. Les anses représentent les bourrasques, et entre ces dernières sont des courbes ayant une courbure opposée. Le vent est aussi, d'après les remarques de M. Marié-Davy, à peu près tangent aux courbes d'égale pression (*). L'air paraît donc,

Fig. 4.



entre les deux bourrasques voisines A et B, tourner autour d'un certain centre dans le sens direct, c'est-à-dire en sens contraire du mouvement de l'air dans chaque bourrasque. Ce centre étant dans un lieu où le baromètre est haut, nous l'appellerons *centre de pression,* comme on appelle souvent le centre d'une bourrasque *centre de dépression,* rappelant par là une de ses propriétés essentielles. Ce centre de pression peut du reste être ou non un maximum absolu de pression, comme le centre d'une bourrasque peut ne pas être, sur une vaste région, un minimum absolu de pression, si plusieurs bourrasques se suivent, ce qui est le cas le plus fréquent.

Un météorologiste Anglais, M. Francis Galton, va jusqu'à admettre

(*) Les détails donnés dans le cours de ce travail expliquent suffisamment pourquoi la tangence n'a pas lieu.

l'existence de cyclones, dans lesquels la pression barométrique est plus faible au centre que sur les bords, et celle d'anti-cyclones, masses d'air en mouvement direct, c'est-à-dire inverse de celui des cyclones, et dans lesquels la pression est plus considérable au centre que sur les bords.

Les anti-cyclones peuvent très-bien n'être que le résultat d'une apparence, car, si des bourrasques tournent, comme il arrive fréquemment, autour d'une région, la pression y sera plus forte et l'air paraîtra sur les bords animé d'un mouvement direct. Si deux lignes de bourrasques marchent parallèlement l'une à l'autre, il y aura entre elles des régions à forte pression se déplaçant dans le même sens que les bourrasques, mais sur les bords desquelles l'air paraîtra encore animé d'un mouvement direct; dans ce cas la vitesse de l'air sera moins grande sur le bord inférieur que sur le bord supérieur, puisque le bord supérieur est le bord inférieur d'une ligne de bourrasques, et que le bord inférieur est le bord supérieur d'une autre ligne de bourrasques. L'apparence sera la même que si un cyclone de sens direct se mouvait parallèlement aux bourrasques.

Quoi qu'il en soit de cette théorie des cyclones et des anti-cyclones, que ces derniers soient quelquefois une réalité ou ne soient jamais qu'une apparence, les centres de pression sont une réalité, et leur position est aussi importante que celle des bourrasques, puisque l'un exclut l'autre.

Or, nous pouvons dire que l'observateur, lorsqu'il est entre deux bourrasques, est sous l'influence du centre de pression, en nous rappelant bien ce que signifie cette expression de convention, et nous reconnaîtrions facilement, comme nous l'avons fait pour les centres de pression, que la rotation du vent se fait, dans tous les cas, dans le sens du mouvement apparent du centre de pression.

D'où nous conclurons cet énoncé général : *lorsqu'un observateur est sous l'influence d'un centre de pression ou de dépression, la rotation du vent est dans tous les cas égale au mouvement apparent du centre auquel il est soumis, et elle est de même sens.*

Cet énoncé ne s'applique pas seulement aux mouvements généraux de l'atmosphère, mais il est vrai pour les mouvements d'un gaz ou d'un fluide quelconque soumis en ses différents points à des pressions différentes, puisqu'une diminution de pression produira toujours une

rotation, et que, quels que soient le sens de cette dernière et le déplacement de la masse de gaz qui tourne, notre énoncé est vrai.

Son utilité peut être de permettre à un observateur attentif de suivre avec un baromètre et une girouette les mouvements de l'atmosphère jusqu'à une assez grande distance du lieu d'observation.

Dans notre hémisphère, les bourrasques tournent en sens rétrograde, et les directions de leurs trajectoires sont comprises entre S.-O. à N.-E. et N.-O. à S.-E.; rarement, on l'a vu, elles descendent plus directement du N; ce qu'on va lire s'applique du reste aussi à ce cas.

Le baromètre étant très-haut, l'observateur voit-il le vent rétrograder pendant que la pression diminue, une bourrasque s'approche de lui puisque le centre de la pression s'éloigne, mais il n'est pas encore sous l'influence de cette bourrasque. Quand, le vent cessant de rétrograder, le baromètre continue à baisser, on entre dans la sphère d'action de la bourrasque; la marche de son centre sera indiquée par la rotation du vent. Si ce dernier tourne peu, le baromètre baissant beaucoup, le centre est encore loin, mais on est près de la trajectoire du centre; le vent tourne-t-il régulièrement, le baromètre baissant moyennement, on est à une moyenne distance du centre de la bourrasque; enfin, si le vent et le baromètre varient peu, on ne touchera pas le bord. La rotation du vent indique le sens du mouvement de la bourrasque, c'est-à-dire des courants généraux de l'atmosphère; on pourra donc se servir de ces remarques pour étudier avec plus de fruit le climat d'une localité isolée sans connaître celui de ses voisines.

La marche du baromètre indique par sa concordance ou son défaut de concordance avec celle du vent si l'on entre dans telle ou telle phase du météore ; la rapidité de ses mouvements donne des indices précieux sur la distance à laquelle passera le centre de la tempête ou des fortes pressions.

La courte et incomplète discussion qui précède suppose que l'observateur traversait le bord de droite d'une bourrasque. Or, supposons-le dans le bord de gauche; partons du moment où il est entre deux bourrasques avec le baromètre le plus haut; le vent commence par tourner dans le sens direct en même temps que le baromètre baisse; puis on entre dans le cercle d'action de la bourrasque, le baromètre continue de baisser pendant que le vent rétrograde, puis, le vent continuant de

rétrograder, le baromètre remonte. On sort de la bourrasque lorsque le baromètre continuant de monter, le vent commence à marcher dans le sens direct.

On voit que les mêmes alternatives se présentent que dans le cas précédent; seulement, ce qui annonçait une sortie de la bourrasque annonce une entrée. Comment reconnaître ces deux cas si différents? La force du vent et sa direction générale doivent suffire pour indiquer au météorologiste la partie de la bourrasque dans laquelle il se trouve; est-il dans la partie droite de l'anticyclone, il se retrouvera bientôt dans la partie gauche du cyclone; les courants généraux sont-ils d'O., on ressentira des vents des régions E. dans la droite de l'anticyclone. La force du vent, une fois que la bourrasque se fera sentir, suffira bien pour indiquer où passe son centre, mais on voit que, même lorsqu'elle n'est pas encore arrivée, on pourra, en suivant bien le baromètre et le vent, savoir si on entrera dans le bord droit ou le bord gauche, chose d'une importance capitale à connaître, puisque de là dépend le calme de l'air et le beau temps ou son agitation avec le mauvais temps.

L'état du ciel viendra du reste encore en aide dans les cas douteux qui pourront survenir par suite de variations produites par des mouvements peu importants enclavés dans le mouvement général et le masquant quelquefois.

L'hygromètre devra aussi être consulté dans un grand nombre de cas, et il le sera toujours avec fruit. Il peut en effet indiquer des coups de vent que le baromètre n'annonce pas le moins du monde par une baisse comme d'ordinaire.

Ce fait avait déjà été remarqué par Vaneechout, qui écrivait en décembre 1857 à Maury :

« Durant notre séjour en rade de Chiriqui (Nouvelle-Grenade), en décembre 1853 et janvier 1854, nous avons éprouvé à différentes reprises de violents coups de vent du N. et du N.-E., qui doivent être spécialement mentionnés parce qu'aucun changement dans la hauteur barométrique ne les annonçait. J'ajouterai que dans ces parages les variations du baromètre sont à peine sensibles. Ces coups de vent duraient deux ou trois jours, et s'annonçaient, comme la grêle, par des rafales suivies d'intervalles de calme; mais leur caractère le plus remarquable est l'influence qu'ils exerçaient sur l'hygromètre. Cet

instrument, qui pendant les plus fortes pluies n'a jamais dépassé 40 ou 50 degrés, et qui pendant les jours les plus chauds ne descendait pas au-dessous de 29 ou 30 degrés descendait, au commencement de ces coups de vent, à 10 degrés, puis à 5 degrés, et marquait zéro quand ils atteignaient leur maximum de violence. Quelques heures avant que le vent diminuât, l'hygromètre s'était déjà élevé de quelques degrés, et à mesure que la brise mollissait, il montait à 20, puis à 30, puis à 35 degrés. »

On observe en Europe de semblables coups de vent; sans parler du mistral, du bora, je citerai les coups de vents de février 1865. Une forte bourrasque passait le 17 février sur les Iles-Britanniques, la France et la mer du Nord. Elle se dirigeait vers l'E., donnant des vents très-forts d'entre S.-O. et N.-O., sur la France, les Pays-Bas, l'Angleterre et l'Irlande méridionale. Le vent qui avait passé à N.-N.-O. sur la Manche, revenait à S.-O. malgré une hausse du baromètre; la baisse se produisait et le vent restait à S.-O., puis tournait à O.; le baromètre remontait et le vent tournait à N.-N.-O., où il restait en même temps que la hausse se continuait, sa force diminuait enfin un peu pendant qu'il tournait à N.-E. et E. et que la pression ne cessait d'augmenter. La bourrasque pendant ce temps, après avoir marché vers l'E. sur la mer du Nord, se dirigeait vers le S. et descendait vers l'Italie et la Grèce. Le vent rétrogradait à N.-E., et le baromètre baissait. La bourrasque était passée. On entrait sous l'influence d'une autre. Pendant le passage de cette bourrasque le baromètre n'était jamais descendu bien bas; il avait atteint 750 millimètres quand le vent était à l'O.; c'est à ce moment que le centre était passé le plus près de la Manche, puis le baromètre avait monté, le vent avait tourné vers N. et N.-E., le centre s'éloignait vers le S.-E. et le S. La force du vent était encore très-grande de N.-N.-O. quand le baromètre était monté jusqu'à 773 millimètres, et elle commençait seulement à diminuer ensuite; le baromètre baissait presque aussitôt.

L'hygromètre donne pendant ces coups de vent des indications analogues à celles de Chiriqui. La durée et la force des vents de N. est due au changement de direction de la bourrasque, et la brusque rotation vers N. fort avant que le baromètre ait notablement remonté était un indice de ce changement de direction pour un observateur isolé; il

pouvait en conclure, d'après ce qui précède, la continuation du vent fort de N. On peut donc maintenant, d'après les moyennes des éléments météorologiques en un lieu, indiquer avec sûreté les courants généraux qui y passent, sans avoir besoin pour cela d'étudier les lieux voisins, et l'on reconnaît en même temps l'effet des circonstances locales sur ces courants généraux.

On peut aussi, avec une girouette et un baromètre, suivre de chez soi la marche des bourrasques, connaître, par suite, d'après une série de quelques jours d'observations faites en un seul lieu, le régime des courants généraux qui passent sur une région.

Le vent n'est plus cet élément insaisissable, symbole de l'inconstance; nul doute qu'on ne puisse bientôt reproduire à volonté, par des expériences, les circonstances les plus variées de la circulation atmosphérique, et soumettre les mouvements si divers de l'air à des formules mathématiques dégagées de toute hypothèse et fondées uniquement sur des lois générales, résultat de l'observation.

SOLUTIONS ENTIÈRES

DE

L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE

$$Ax + By = S,$$

PAR M. L'ABBÉ B.-I. CLASEN,
PROFESSEUR A LUXEMBOURG.

Nous supposerons A, B et S positifs et entiers; toutes les équations de ce genre se ramènent facilement à ce cas. Soit $A > B$, on trouve la solution la plus simple ou l'une des deux plus simples solutions en formant le tableau suivant :

	b	c	d	e	...	i	k	l	m	n	o	p	q
A	B	C	D	E	...	I	K	L	M	N	O	P	Q
$\pm\alpha$	$\mp\beta$	$\pm\gamma$	$\mp\delta$	$\pm\varepsilon$	...	$+\iota$	$-\varkappa$	$+\lambda$	$-\mu$	$+\nu$			
A′	B′	C′	D′	E′	...	I′	K′	L′	M′	o			

La deuxième ligne contient les différents diviseurs qu'on trouve en cherchant d'après la méthode ordinaire le plus grand commun diviseur de A et de B,

La première ligne contient les quotients correspondants à ces diviseurs, de sorte que

$$A = bB + C, \quad B = cC + D, \ldots.$$

Pour former la troisième ligne on décompose S en différentes par-

ties, multiples chacune d'un des nombres A, B, C,..., c'est-à-dire qu'on satisfera à l'équation suivante en attribuant des valeurs entières à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

$$S = \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots + \pi P + \chi Q.$$

De quelque manière qu'on choisisse les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi$, pourvu seulement que $S - \alpha A - \beta B - \gamma C - \ldots - \pi P$ ne soit pas négatif, χ sera entier et positif (ou zéro) si S est divisible par Q, et fractionnaire si S n'est pas divisible par Q, parce que les nombres A, B, C,..., P sont tous divisibles par Q, le plus grand commun diviseur de A et B. Pour que cette décomposition de S soit possible, il faut donc et il suffit que S soit divisible par Q. C'est, comme on sait, la condition même de la possibilité de notre problème. La justesse de notre méthode ne dépend pas de la manière dont on décompose S en multiples de A, B,.... En appliquant nos règles avec les précautions nécessaires on pourrait même attribuer à $\alpha, \beta, \ldots$ des valeurs négatives; mais pour trouver la plus simple solution et pour la trouver par les plus simples calculs, on décomposera S de préférence en multiples des plus grands nombres de la deuxième ligne, et l'on divisera par conséquent d'abord S par A, on désignera par α la partie entière du quotient de cette division, on en divisera le reste par B pour trouver de la même manière β et ainsi de suite. Généralement un certain nombre des facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seront égaux à zéro. Soit ν le dernier de ceux qui ne sont pas nuls; nous pourrons négliger les suivants. Ces facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ formeront la troisième ligne et seront placés au-dessous des nombres A, B, C,..., N qu'ils multiplient dans l'expression de S. Nous donnerons au dernier de ces facteurs ν le signe $+$, à l'avant-dernier μ le signe $-$, à λ le signe $+$, et ainsi de suite, en faisant alterner dans la troisième ligne les signes $+$ et $-$.

Dans la quatrième ligne le nombre qui correspond au dernier nombre ν de la troisième ligne ainsi que les suivants sont égaux à zéro. La loi générale par laquelle chaque nombre de cette ligne se déduira de ceux qui le suivent et de ceux de la troisième ligne est donnée par la formule

$$C' = dD' + E' \mp \delta;$$

si E' ne figure pas au tableau ce nombre est censé être nul.

La solution cherchée sera alors

$$x = \pm B' + \alpha,$$
$$y = \mp A'.$$

Les signes + ou − qu'il faut choisir pour B' et A' sont les signes respectivement contraires à ceux de β et α du tableau.

Démonstration.

D'après la manière dont notre tableau a été formé, nous avons

1°
$$M' = on + o + \nu = \nu$$

et

$$(1) \qquad M'N = \nu N;$$

2°
$$L = mM + N, \qquad LM' = mMM' + M'N,$$
$$L' = mM' + o - \mu, \quad L'M = mMM' - \mu M,$$

d'où l'on tire, en comparant avec l'équation (1),

$$(2) \qquad LM' - L'M = \mu M + \nu N \ (^*);$$

3°
$$K = lL + M, \qquad KL' = lLL' + ML',$$
$$K' = lL' + M' + \lambda, \quad K'L = lLL' + M'L + \lambda L,$$

d'où l'on tire, en comparant avec l'équation (2),

$$-KL' + K'L = \lambda L + \mu M + \nu N;$$

et en général si

$$(3) \qquad \pm CD' \mp C'D = \delta D + \varepsilon E + \ldots + \nu N;$$

on vérifie cette loi pour les nombres qui précèdent C, C', D et D', dans

(*) On fera bien d'observer que les signes des termes qui contiennent L', M' sont les signes contraires de λ et μ.

les deuxième et troisième lignes, car

$$\begin{aligned} B &= cC + D, & BC' &= cCC' + C'D, \\ B' &= cC' + D' \pm \gamma, & B'C &= cCC' + CD' \pm \gamma C, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en comparant avec l'équation (3) et en observant que les signes supérieur et inférieur de $\pm \gamma$ correspondent respectivement aux signes supérieurs et inférieurs de l'équation (3),

$$\mp BC' \pm B'C = \pm CD' \mp C'D + \gamma C = \gamma C + \delta D + \varepsilon E + \ldots + \nu N.$$

Cette loi étant vérifiée pour $LM' - L'M$ (2) doit par conséquent être générale et

$$\pm AB' \mp A'B = \beta B + \gamma C + \ldots + \nu N.$$
$$\pm AB' \mp A'B + \alpha A = S,$$
$$A(\pm B' + \alpha) \mp BA' = S.$$

Donc $x = \pm B' + \alpha$, $y = \mp A'$ est une solution de l'équation $Ax + By = S$.

Si S a été décomposé d'après la méthode que nous avons expliquée, 1° les nombres A', B', C' seront tous positifs, et 2° la solution qu'on trouvera sera l'une des deux solutions les plus simples.

1° Puisque $\delta D + \varepsilon E + \ldots + \nu N$ est le reste d'une division par C,

(4) $$C > \delta D + \varepsilon E + \ldots + \nu N,$$

et, comme $C = dD + E$,

$$dD + E > \delta D + \varepsilon E + \ldots + \nu N.$$

Donc

$$d + \frac{E}{D} > \delta.$$

D n'est pas nul, sans quoi d et δ dont nous nous occupons ici n'existeraient pas. Si E est nul, c'est-à-dire si D est le dernier nombre de la deuxième ligne, alors

(5) $$d > \delta.$$

En tout cas, comme $D > E$, il faut que l'on ait

(6) $$d + 1 > \delta.$$

$M' = \nu$. Ce dernier nombre de la troisième ligne étant d'après nos règles affecté du signe $+$, il s'ensuit que $M' > 0$.

$$L' = mM' - \mu,$$
$$K = mM + N,$$
$$K > \mu M + \nu N,$$

d'après l'inégalité (4); donc

$$mM + N > \mu M + \nu N,$$

et puisque $\nu = M'$,

$$mM + N > \mu M + NM',$$

$$m > \mu + \frac{N(M'-1)}{M} \ (*),$$

$$mM' - \mu \quad \text{ou} \quad L' > \frac{NM'(M'-1)}{M} + \mu(M'-1),$$

M' étant entier et positif, il s'ensuit que $L' > 0$.

Je dis maintenant qu'en général si $E' > 0$ et $D' > 0$, on aura aussi $C' > 0$.

En effet

$$C' = dD' + E' \mp \delta,$$

et puisque δ est tout au plus égal à d, et que D' est entier et positif, C' est tout au moins égal à E' et par conséquent plus grand que zéro. A', B', C',... sont donc tous positifs parce que L' et M' le sont.

2° Je dis que $\frac{M}{Q} > M'$. N peut être le dernier nombre de la deuxième ligne. Alors Q, le plus grand commun diviseur de A et B, est ce même nombre N, et je dois prouver que $\frac{M}{N} > M'$.

Dans ce cas

$$M = nN, \quad \frac{M}{N} = n$$

et d'après l'inégalité (5)

$$n \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N} > \nu \quad \text{ou} \quad M'.$$

(*) Inutile de rappeler que tous les nombres de la deuxième ligne, ainsi que α, β, γ,..., sont positifs et entiers.

Si N n'est pas le plus grand commun diviseur de A et B, alors

$$M = nN + O,$$
$$\frac{M}{Q} = n\frac{N}{Q} + \frac{O}{Q},$$

Q étant alors moindre que N et pouvant tout au plus être égal à O, $\frac{M}{Q}$ est plus grand que $n + 1$ et par conséquent plus grand que ν (6) ou M′. Donc

$$\frac{M}{Q} > M'.$$

J'en tire

$$\frac{L}{Q} > L'.$$

$$L = mM + N,$$
$$\frac{L}{Q} = m\frac{M}{Q} + \frac{N}{Q},$$
$$L' = mM' + \mu.$$

Donc

$$\frac{L}{Q} > mM' + \frac{N}{Q} > L'.$$

Je dis maintenant qu'en général si $\frac{E}{Q} > E'$, $\frac{D}{Q} > D'$, on aura aussi $\frac{C}{Q} > C'$.

En effet

$$C = dD + E,$$
$$\frac{C}{Q} = d\frac{D}{Q} + \frac{E}{Q}.$$

$\frac{D}{Q}$, qui est par supposition plus grand que D′ et entier parce que Q divise tous les nombres de la deuxième ligne, doit au moins être égal à $D' + 1$, et $\frac{C}{Q}$ est au moins égal à $dD' + \frac{E}{Q} + d$.

$$C' = dD' + E' \mp \delta,$$

d n'étant pas plus grand que δ (6) et $\frac{E}{Q}$ étant plus grand que E′ par supposition, nous aurons $\frac{C}{Q} > C'$.

Nous venons de démontrer que $\frac{M}{Q} > M'$ et $\frac{L}{Q} > L'$, il faut donc que $\frac{K}{Q} > K'$, et de là on tire

$$\frac{I}{Q} > I', \ldots, \quad \frac{A}{Q} > A'.$$

La valeur générale entière de y est, comme on sait, en désignant par t un entier quelconque, $\mp\left(A' \pm \frac{A}{Q}t\right)$, le signe qui précède la parenthèse étant le signe contraire du α de notre tableau. Il suit de ce que $A' < \frac{A}{Q}$, que la plus petite valeur entière de y du signe contraire au α de notre tableau est $\mp A'$.

Exemple. $2072x + 427y = 27300$.

Si l'on commence la décomposition de 27300 par le nombre 427, les calculs à faire se disposent de la manière suivante :

	4	1	5	1	3	2
2072	427	364	63	49	14	7
+0	−63	+1	−0	+0	−2	+1
4	14	11	2	1	1	0

$$y = -4, \quad x = +14.$$

Troisième ligne. — La division de 27300 par 427 donne pour quotient 63;

Le reste de cette division, 399, divisé par 364 donne pour quotient 1;
Le reste de cette division, 35, divisé par 14 donne pour quotient 2;
Le reste de cette division, 7, divisé par 7 donne pour quotient 1.

La *quatrième ligne* a été formée par les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
2.0 &+ 0 + 1 = 1,\\
3.1 &+ 0 - 2 = 1,\\
1.1 &+ 1 + 0 = 2,\\
5.2 &+ 1 - 0 = 11,\\
1.11 &+ 2 + 1 = 14,\\
4.14 &+ 11 - 63 = 4.
\end{aligned}$$

Si l'on commence la décomposition de 27 300 par le nombre 2072, on trouve $27\,300 = 13.2072 + 1.364$ et le tableau devient

	4	
2072	427	364
+13	−0	+1
4	1	

$$y = -4, \quad x = 1 + 13 = 14.$$

Autre exemple. $45y + 65x = 3300.$

	1	2	4
65	45	20	5
−50	+1	−0	+1
4	3	1	

$$y = +4, \quad x = -3 + 50 = 47.$$

Si l'on avait à résoudre l'équation $45y - 65x = 3300$ on la ramènerait à ce cas en posant $x = -u$; l'équation deviendrait

$$45y + 65u = 3300, \quad y = 4, \quad u = 47, \quad x = -47.$$

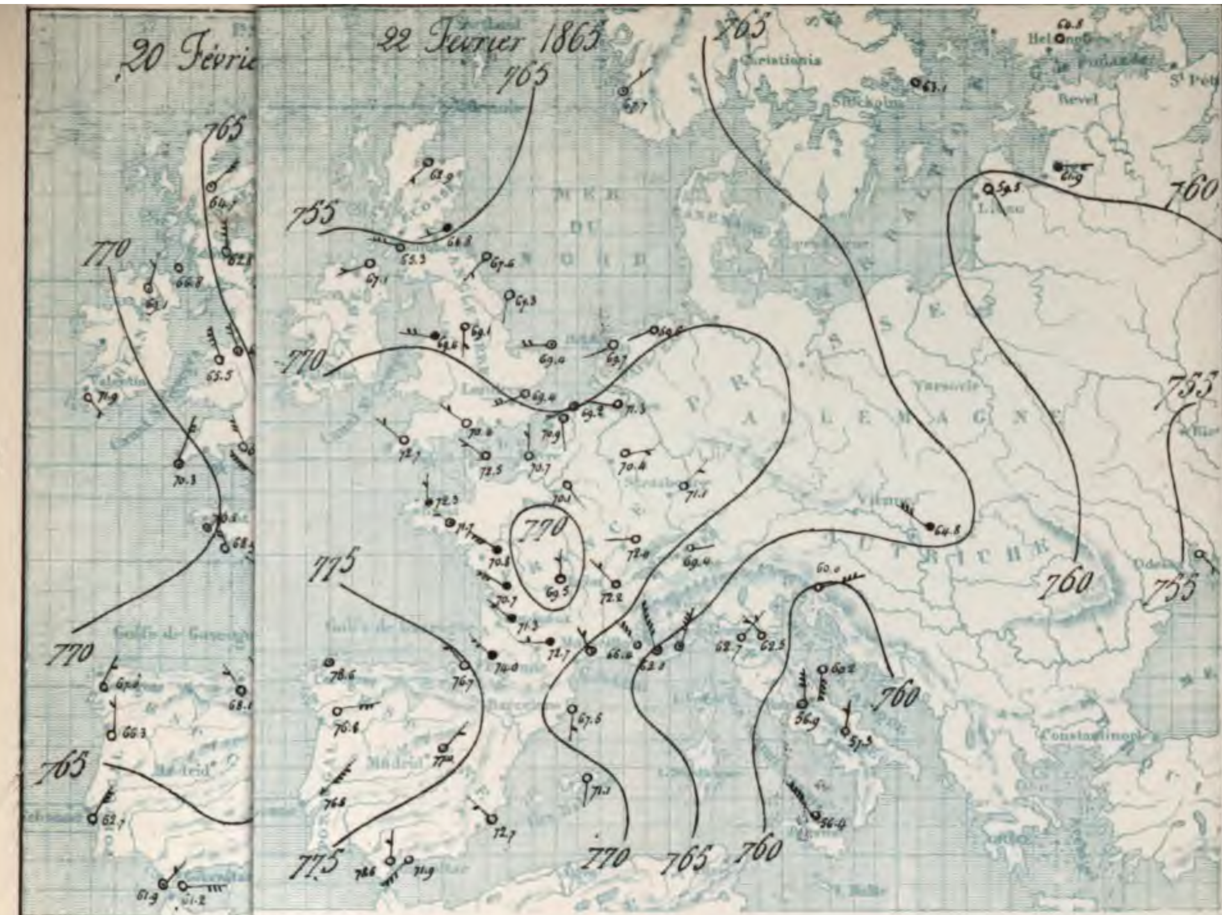
Observation. — Pilatte avait indiqué dans les *Annales de Gergonne*, 1812, un algorithme pour trouver des solutions simples des équations indéterminées du premier degré. M. Catalan l'a publié et recommandé plusieurs fois (*Géomètre*, 1836; *Cours de Mathématiques*, de Blum; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III). Il a quelque analogie avec notre méthode. Celle-ci conduit cependant par des calculs beaucoup plus simples à des solutions souvent plus simples également, et elle a été trouvée par des considérations d'un ordre très-différent.

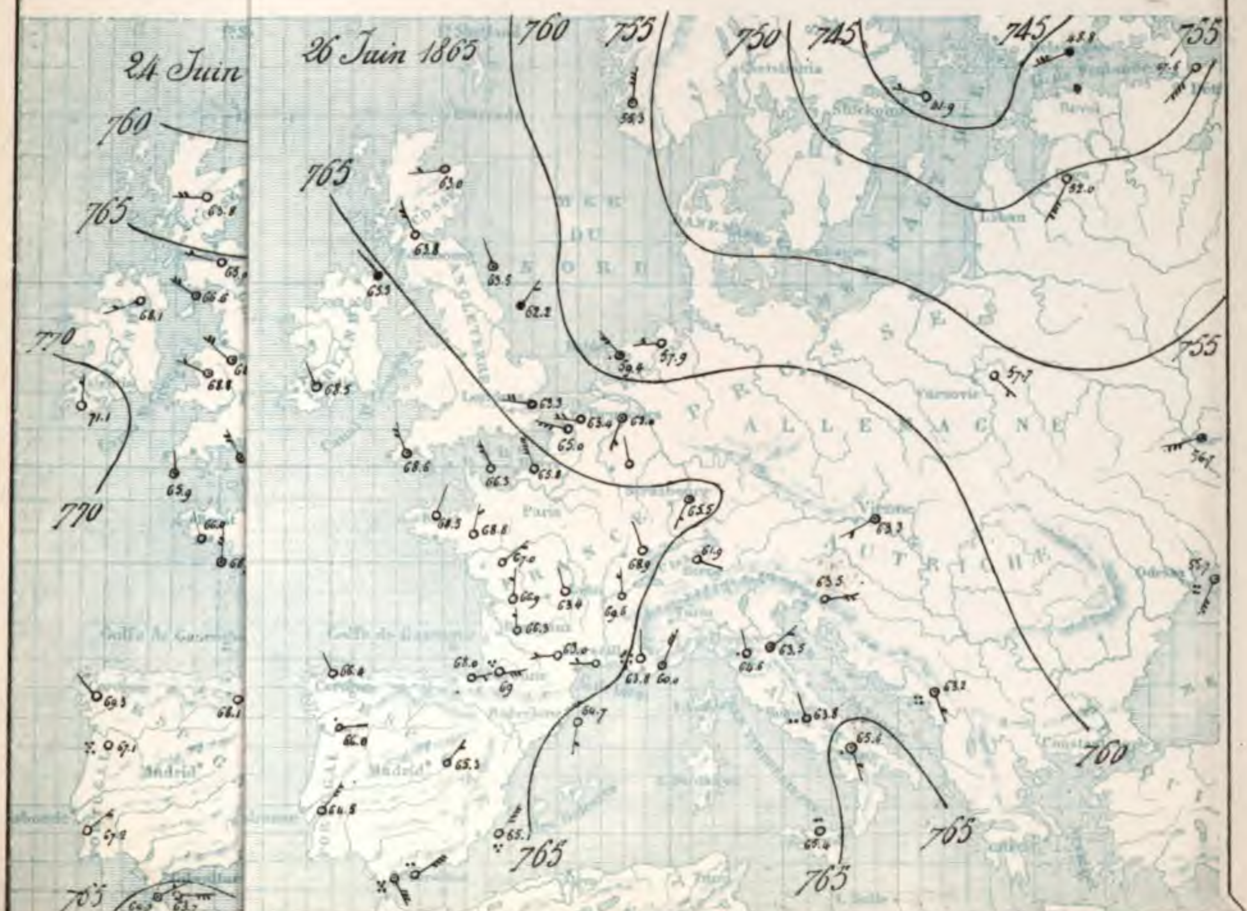
FIN DU TOME QUATRIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

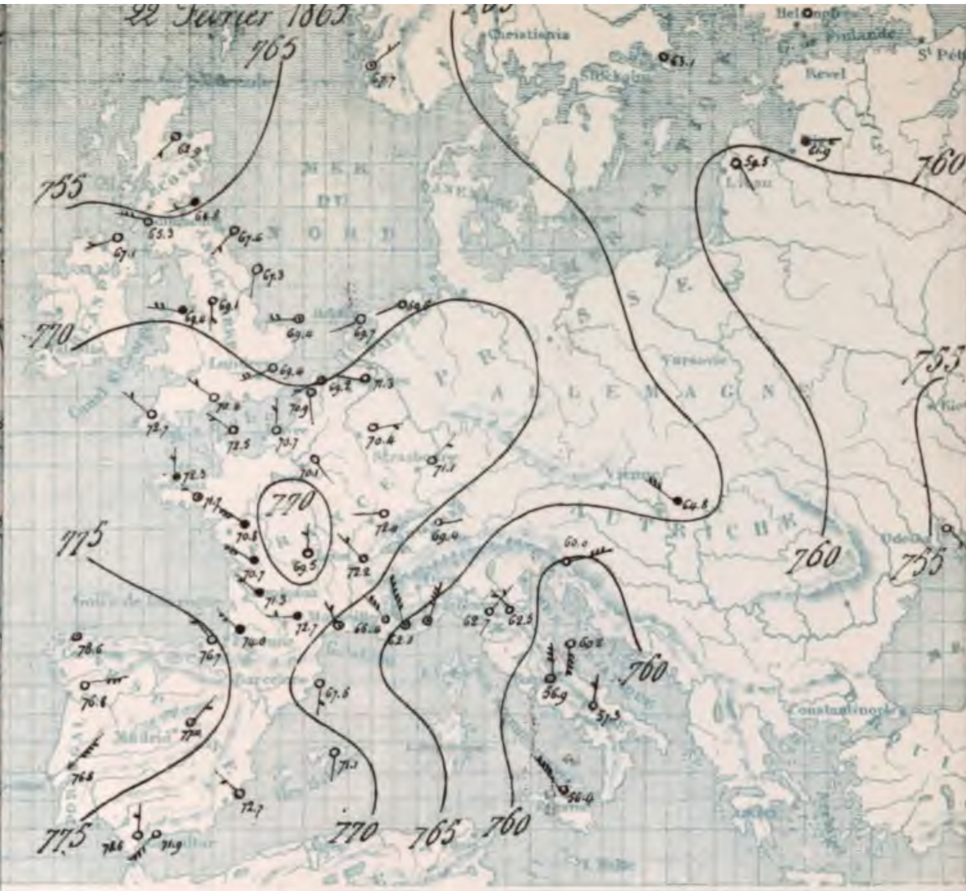
DU TOME QUATRIÈME.

PLANCHES.

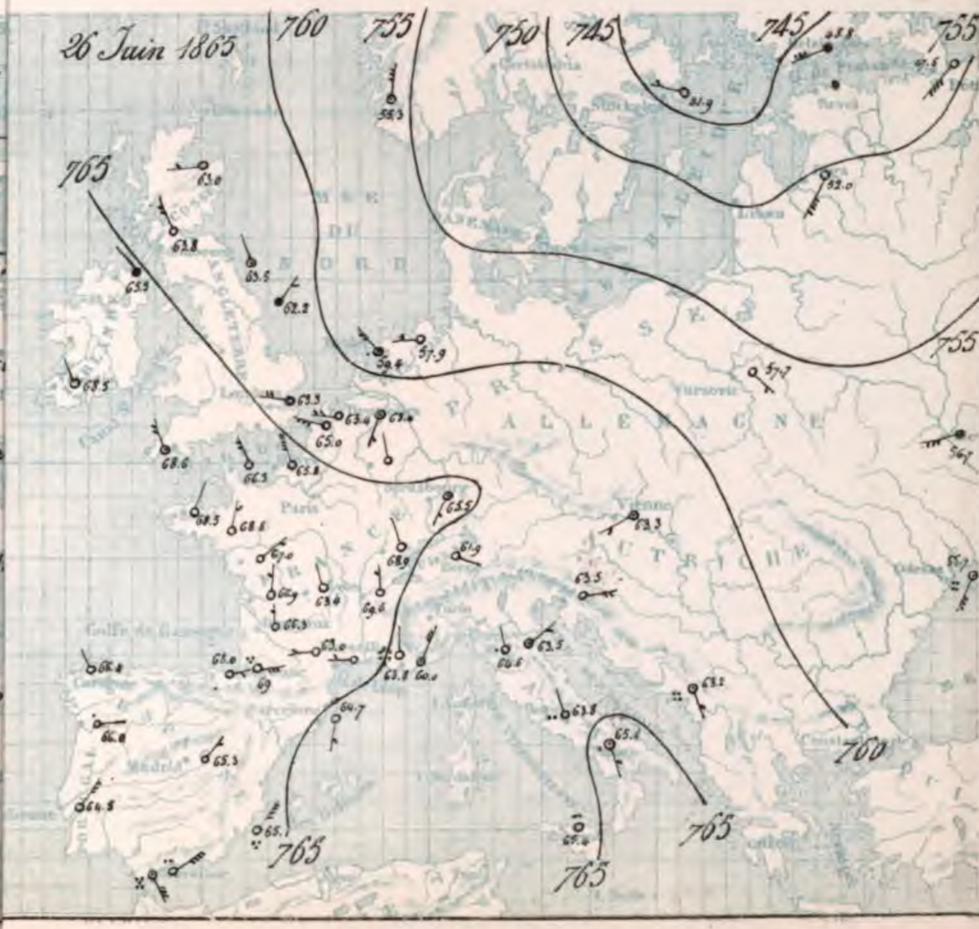

20 Févrie
22 Février 1865
MER DU NORD
PRUSSE
ALLEMAGNE
AUTRICHE
Christiania
Stockholm
Varsovie
Vienne
Constantinople
Madrid
Golfe de Gascogne
765
755
770
775
760

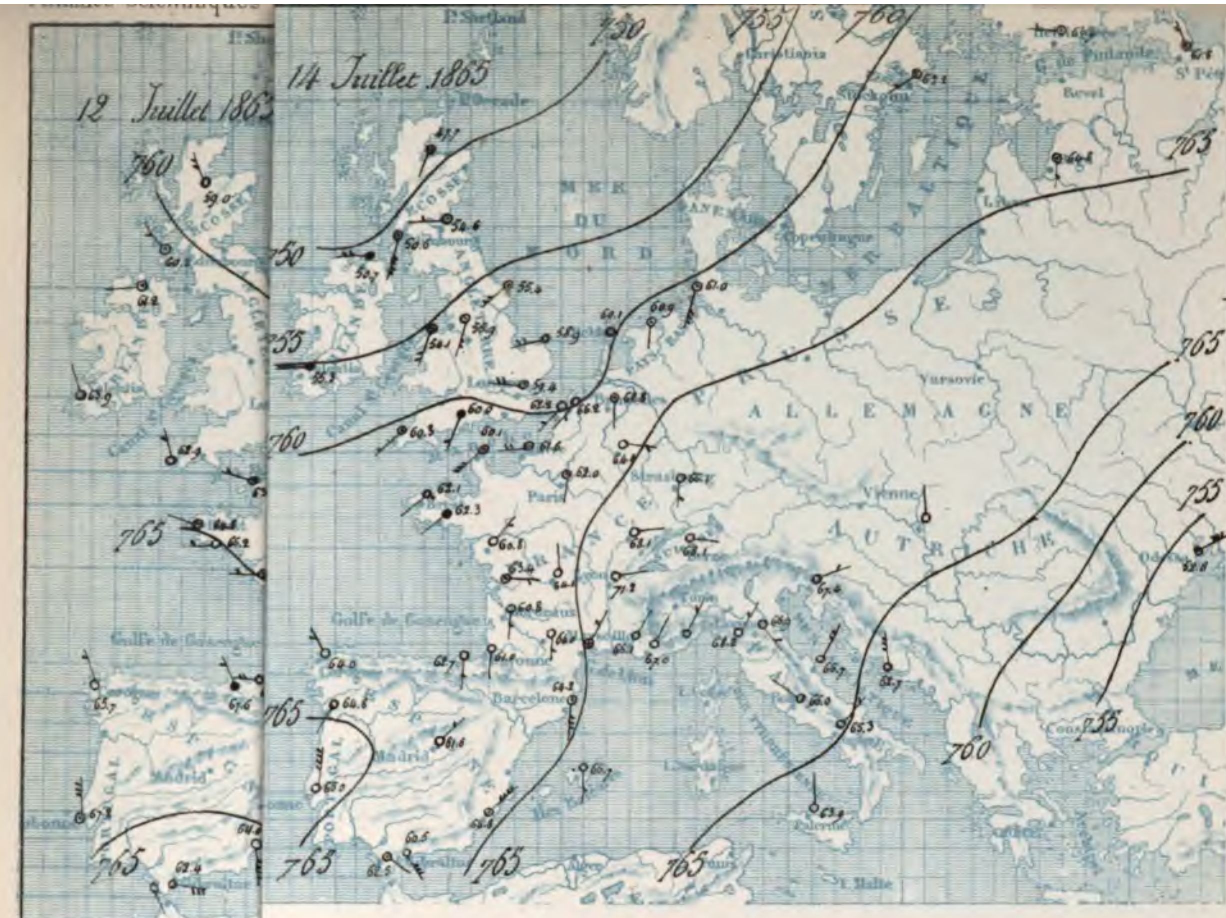

24 Juin
26 Juin 1865
MER DU NORD
PRUSSE
ALLEMAGNE
AUTRICHE
Christiania
Stockholm
Varsovie
Vienne
Paris
Madrid
Golfe de Gascogne
760
755
750
745
765
770

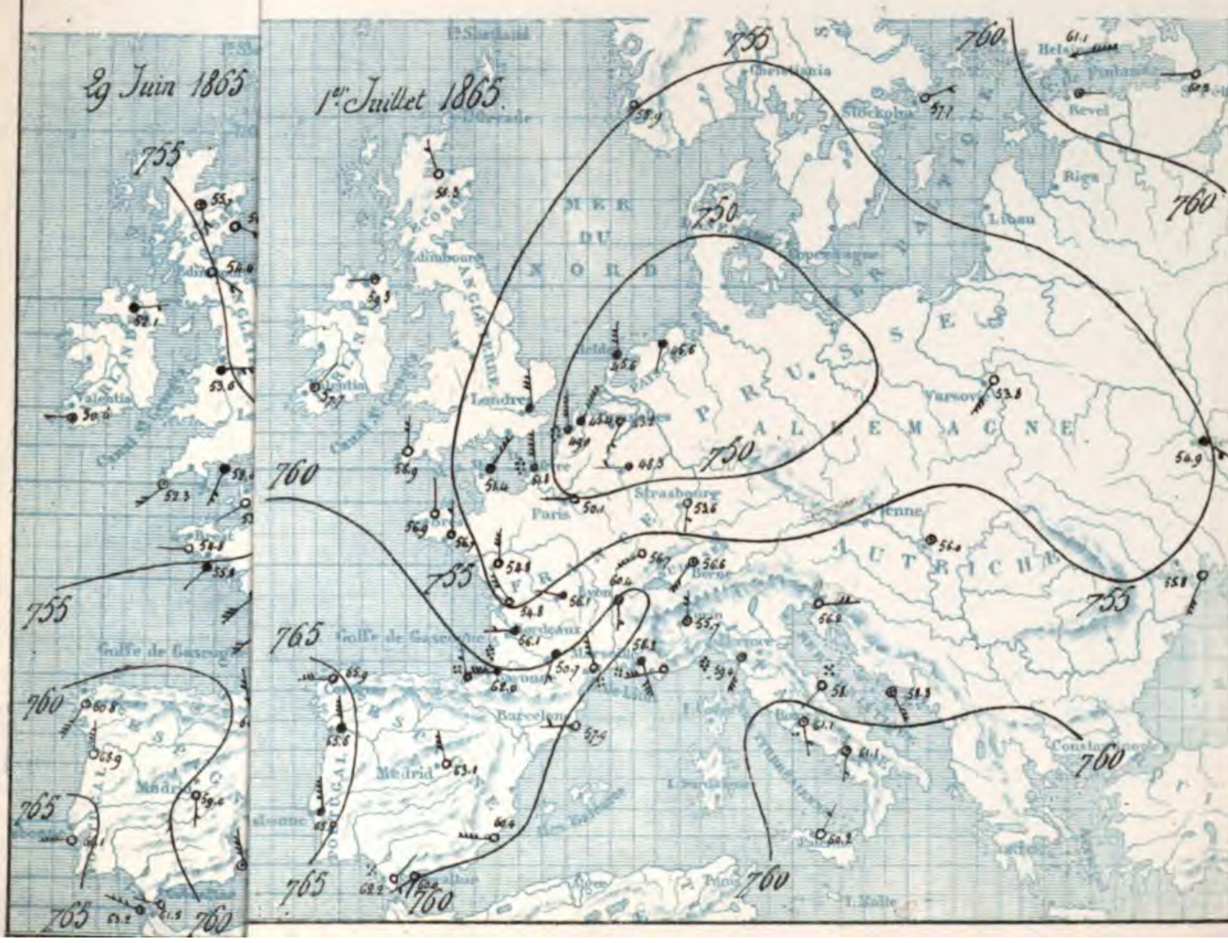

20 Févrie

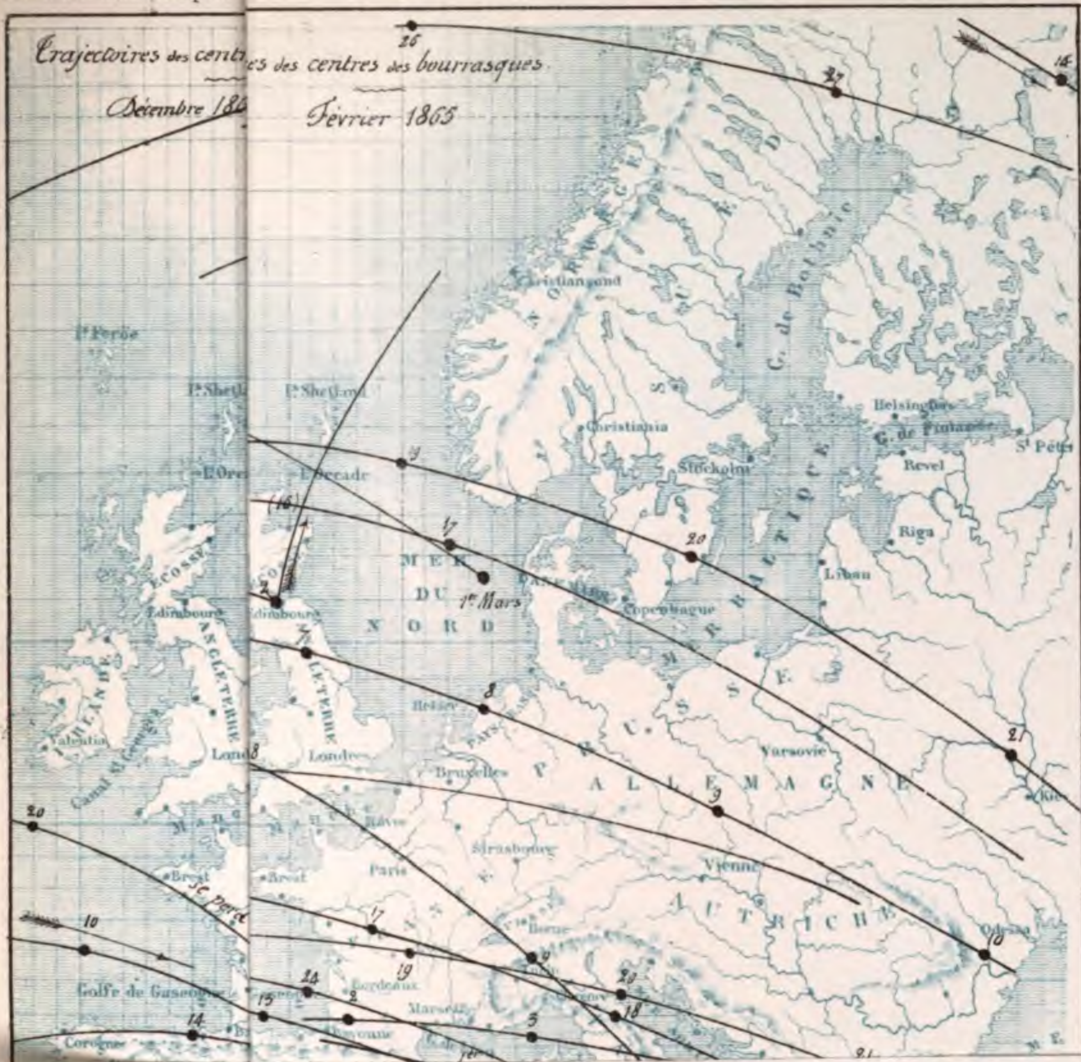

22 Février 1865

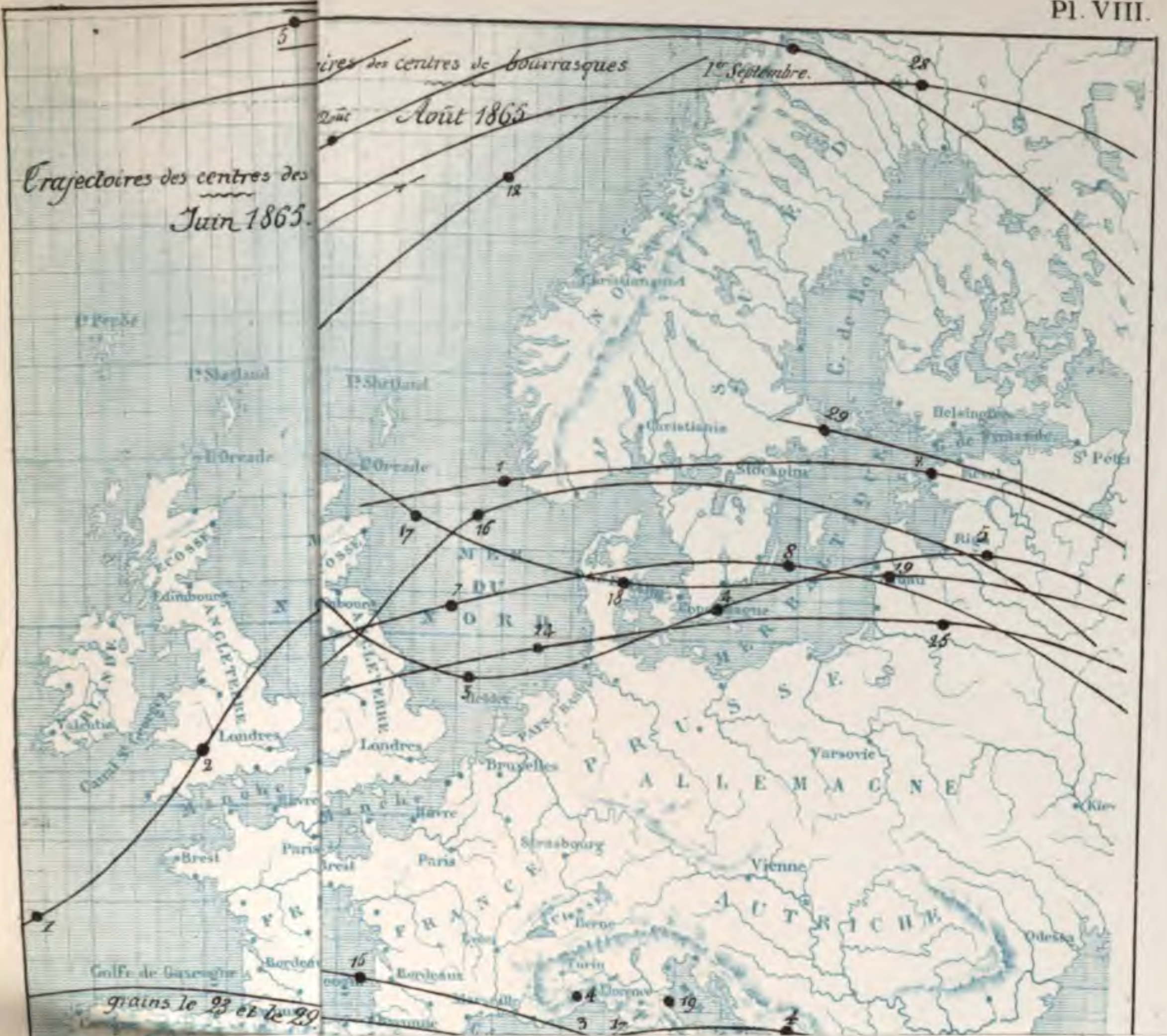

24 Juin


26 Juin 1865


14 Juillet 1865
12 Juillet 186
MER DU NORD
ALLEMAGNE
AUTRICHE
PRUSSE
Paris
Vienne
Varsovie
Madrid
Barcelone
Golfe de Gascogne
Copenhague
Stockholm
Christiania
750
755
760
765


1er Juillet 1865
29 Juin 1865
MER DU NORD
ALLEMAGNE
AUTRICHE
PRUSSE
Paris
Strasbourg
Vienne
Varsovie
Madrid
Barcelone
Londres
Golfe de Gascogne
Copenhague
Stockholm
Christiania
Riga
Libau
Reval
750
755
760
765


Trajectoires des centres des bourrasques
Décembre 18
Février 1865
Christiansand
Christiania
Stockolm
Helsingfors
G. de Finlande
Revel
St Péter
Riga
Libau
C. de Bothnie
Copenhague
MER DU NORD
1er Mars
Edimbourg
ECOSSE
ANGLETERRE
IRLANDE
Valentia
Canal St George
Londres
Bruxelles
Paris
Strasbourg
Brest
Havre
Bordeaux
Marseille
Bayonne
Golfe de Gascogne
Corogne
Berne
Vienne
Varsovie
Odessa
P R U S S E
A L L E M A G N E
A U T R I C H E
Ie Feröe
Ie Shetland
Ie Orcade
26
27
16
19
20
17
21
8
9
10
14
15
24
5
18
22


Trajectoires des centres des
Juin 1865.
ires des centres de bourrasques
Août 1865
1er Septembre.
Mer du Nord
Angleterre
Écosse
Irlande
Londres
Edimbourg
Paris
Brest
Bordeaux
Golfe de Gascogne
France
Bruxelles
Strasbourg
Allemagne
Prusse
Varsovie
Vienne
Autriche
Odessa
Kiev
Christiania
Stockholm
Helsingfors
C. de Bothnie
Turin
Berne
I. Shetland
I. Orcade
Valentia
Manche
grains le 28 et le 29